

4704

**JUNTA NACIONAL DE PLANIFICACION  
Y COORDINACION ECONOMICA**

---

E/7-13.10-59



**UN MODELO  
DEL CRECIMIENTO ECONOMICO**

**HECTOR CORREA**

**QUITO — ECUADOR  
1959**

"Sesquicentenario del Primer Grito de la Independencia  
en Hispanoamérica.—10 de Agosto.—Quito, 1809 — 1959"

JUNTA NACIONAL DE PLANIFICACION Y  
COORDINACION ECONOMICA.

E/7-13.10-59.

Un Modelo Del Crecimiento Económico.

Héctor Correa.

El autor agradece las valiosas observaciones hechas por el señor doctor Germánico Salgado, Director Técnico de la Junta Nacional de Planificación y Coordinación Económica y por el señor doctor Hans Linne man, Asesor del Departamento Técnico de la misma institución. De todas maneras, cualquier error que pudiera existir es de responsabilidad del autor.

Quito - Ecuador

1959.

"Sesquicentenario del primer Grito de la Independencia  
en Hispanoamérica.- 10 de Agosto.- Quito, 1809 - 1959".

La Junta Nacional de Planificación publica el presente estudio del Economista Héctor Correa, fundamentalmente con fines de discusión y análisis; pues, luego de todas las reformas que aparecieran como convenientes, tratará de enmarcar su estudio de un plan de desarrollo económico para la República del Ecuador, en el modelo resultante. Por lo tanto, agradecerá se sirvan pedir cualquier explicación adicional que los lectores consideren necesaria, y remitir a la Institución todo comentario o crítica que crean conveniente.

A pesar de lo dicho, debe tomarse en cuenta que el autor del trabajo debió, durante su preparación, sujetarse a dos limitaciones: la imposibilidad de obtener informaciones suficientes sobre precios y la falta de datos que permitan estimar las tendencias de los parámetros, de manera que éstas deben considerarse constantes. Luego estas dos limitaciones del modelo, a pesar de ser conocidas, no pueden evitarse.

## I. CONCEPTOS BASICOS.

Una definición defectuosa desde el punto de vista lógico, pero usada con frecuencia, es la que dice que Teoría Económica es la Ciencia que tiene por objeto determinar las relaciones de interdependencia que existen entre las magnitudes económicas.

Como un primer aspecto, la teoría económica, en el estudio de un fenómeno determinado, llama la atención sobre las variables de importancia. Luego, las clasifica en dos grupos:

- a) Aquéllas que "influyen en el sistema económico; pero a su vez, no son influenciadas por él o, cuando más, quedan influenciadas en una medida no digna de tenerse en cuenta". Se las denomina exógenas; y,
- b) Aquéllas que reciben la influencia de las anteriores, o endógenas.

Además, la teoría económica, explica el mecanismo de dependencia de las variables endógenas para con las exógenas.

La clasificación de las variables económicas en exógenas y endógenas no es única, sino que varía según el problema en estudio. Así el volumen de exportaciones de un país, es una variable endógena al considerar la teoría del comercio internacional, pero exógena al tratar de un país como unidad económica independiente.

Entre los índices de las condiciones económicas se considera al ingreso. De su análisis, y del de sus componentes: consumo, inversión y saldo de la balanza de pagos, se ocupa, entre otras materias, la teoría del desarrollo económico.

Una de las teorías aceptables de la dinámica económica establece entre las variables mencionadas, las siguientes relaciones: el ingreso determina el consumo; éste el ahorro y parte de las importaciones; el ahorro determina las inversiones, las que determinan lo restante de las importaciones, y el ingreso del siguiente período, con lo que se reinicia el proceso. Además, las exportaciones, como uno de los componentes del saldo de la balanza de pagos, también determina el ingreso; pero, especialmente en los países con recursos desocupados, reciben poca influencia de las otras variables que aparecen en el proceso.

En resumen, según la teoría de la dinámica económica considerada, puede afirmarse que en el proceso del desarrollo económico sólo existe una variable exógena: las exportaciones, siendo las endógenas: Ingreso, Consumo, Inversión e Importaciones.

## II. MODELO ECONOMICO.

Una descripción sistemática de las relaciones de dependencia existentes entre las variables económicas, constituye un modelo. Por ejemplo, uno, excesivamente simplificado está constituido por la descripción que se hace en la Sección I de las relaciones existentes entre las diferentes variables que constituyen el ingreso per cápita.

Para que un modelo sea aceptable de acuerdo a la lógica, debe estar constituido por:

- a) Un conjunto de definiciones e hipótesis respecto a las variables a estudiarse;
- b) Conclusiones que expresan las relaciones existentes entre las variables en estudio, las que deben obtenerse de las definiciones e hipótesis de acuerdo a las reglas de la lógica.

Además de la consistencia lógica, para que un modelo sea aceptado como parte de la teoría económica, las relaciones establecidas entre las variables, deben aproximarse razonablemente a las que existen en la realidad.

En la expresión de los modelos, esto es en la de las definiciones, hipótesis y conclusiones que los constituyen, se utiliza frecuentemente símbolos matemáticos y se procura cumplir las condiciones establecidas por la Ciencia de las Matemáticas para el uso de dicha notación. Puede usarse tanto la notación matemática general, por ejemplo  $C = f(Y)$  para indicar que el consumo depende del ingreso; o formas y ecuaciones específicas como  $C = aY + b$ , en la que se indica que los incrementos del consumo son proporcionales a los del ingreso.

Cuando se emplea la notación en forma consistente con los postulados matemáticos que regulan su uso, se puede utilizar las relaciones generales probadas en esta ciencia, para facilitar la deducción de las conclusiones del modelo.

Con la notación matemática las relaciones de dependencia entre las variables económicas toman la forma de funciones o ecuaciones, y el modelo en su conjunto el de un sistema de ellas.

De acuerdo a las definiciones dadas de variables exógenas y endógenas, los valores de las primeras no están determinados por el sistema de ecuaciones que expresa el modelo, en cambio, el de las segundas sí.

Si del problema teórico de encontrar y probar las relaciones existentes entre ciertas variables económicas, se pasa al práctico de estimar el efecto que sobre las variables endógenas tienen las variaciones de las exógenas, la expresión matemática, con la ayuda de la Estadística, permite mayor precisión y comparabilidad de los resultados.

En estas circunstancias, es indispensable usar ecuaciones matemáticas específicas; siendo preciso, al presentar el modelo, indicar cuáles son los parámetros y cuáles las variables endógenas y exógenas; debiendo estimarse el valor de los parámetros y de las variables exógenas, como condición previa al uso del modelo para la determinación de los valores de las variables endógenas.

No se considerará en el presente trabajo los problemas estadísticos de la estimación de los valores de los parámetros o de las variables exógenas. Sin embargo, cabe indicar que si la insuficiencia de datos impide estimar dichos valores, se los puede sustituir con cifras que en la opinión del que presenta el modelo son las más aceptables, indicando que su determinación es arbitraria.

Cuando de un sistema de relaciones económicas expresado por medio de ecuaciones cuya forma es dada, y con parámetros por estimar, se pasa a un sistema de ecuaciones cuyos parámetros son valores conocidos, se establece lo que se conoce con el nombre de "estructura".

Estimada una estructura, el problema de calcular los valores de las variables endógenas, se identifica con el de resolver un sistema de ecuaciones, debiendo por lo tanto la estructura satisfacer las condiciones necesarias y suficientes establecidas en las matemáticas para que un sistema de ecuaciones pueda resolverse.

En el caso de un modelo dinámico como el presentado en la Sección I, el sistema de ecuaciones que se utiliza para expresarlo, debe ser suficiente para reproducir la evolución de la economía. En estas circunstancias, si se llega al cálculo de una "estructura", ésta permitiría estimar las condiciones que adoptaría una unidad económica, si es que se deja que su evolución siga sin intervención de ningún organismo director.

### III. PLANIFICACION Y POLITICA ECONOMICA.

Con la expresión Planificación Económica, en su concepto más amplio, se hace referencia a todos los pasos iniciales de cualquier política económica racional.

Desde el punto de vista de la política, las variables económicas se clasifican en medios, metas y otras variables.

Las primeras son aquellas modificables por la intervención de los organismos directores de la política económica.

Se determinan las segundas de entre las que tienen algún significado especial como índices de la situación económica en lo que se refiere al problema en estudio; y, toman el nombre de variables metas, porque se les da valores que deben alcanzarse como resultado de una política dada.

El grupo de las otras variables está formado por aquellas que no son ni medios, ni metas.

El interés de los organismos directores de la economía es fijar los valores que deben adoptar las variables metas para resolver un problema económico cualquiera, y estimar los valores que deben dar a los medios para que dichas metas se alcancen.

Planteado un problema económico, las funciones que corresponden a la planificación son:

a) Delimitación del campo de estudio correspondiente al problema, lo que incluye la especificación de las variables endógenas y exógenas de importancia en el mismo, y las relaciones existentes entre ellas. En resumen, el primer paso es determinar el modelo teórico para analizar el problema.

Conocidas las variables de importancia en el problema, se debe determinar de entre ellas las que son medios, las que son metas y las otras variables.

Por último, coordinando los datos sobre variables endógenas y exógenas, con los referentes a medios, metas y otras variables, se debe determinar:

1) Si las variables que se consideran medios realmente lo son, lo que requiere que no estén caracterizadas como variables endógenas cuyo curso es imposible de modificar.

Ciertas variables endógenas tienen una influencia fundamental en los procesos económicos, tal es el caso de la inversión en el desarrollo económico.

Puede darse el caso de que para la obtención de metas determinadas, sea necesario que los organismos directores de la economía, utilicen como medios a variables endógenas que, a pesar de serlo, ejercen gran influencia. En este caso existirá un valor de las variables propiamente endógeno, esto es, determinado por las condiciones del sistema económico, y otro autónomo, determinado por las metas dadas a la política económica.

En el sistema de ecuaciones que constituye el modelo, es conveniente introducir en forma explícita a las variables "autónomas". En el caso de que no se suponga planificación el valor de dichas variables será cero, y, cuando se la suponga, su valor estará determinado por el de las metas.

La introducción explícita de las variables autónomas en el modelo permite utilizar el mismo sistema de ecuaciones tanto cuando se supone planificación como cuando no se la supone; y en el primer caso permite valorar la magnitud con que los directores de la economía deben colaborar al valor de los medios para alcanzar las metas; y, además, conocer el efecto que dicha "colaboración" tiene sobre las variables restantes en el sistema.

Como ya queda indicado, en el modelo presentado en la Sección I, la inversión es una variable endógena, pero siendo crucial su importancia para el desarrollo económico, es conveniente introducir a la inversión autónoma como variable adicional.

2) La relación existente entre medios y metas, para conocer si los medios disponibles tienen la influencia necesaria sobre el sistema económico de manera que éste se oriente hacia las metas buscadas; y la forma que dicha influencia se ejerce, para que así sea posible determinar el uso que se debe dar a los medios para alcanzar las metas.

Si se presenta el caso de que las variables escogidas como metas no dependan de los medios, ni puedan ser arbitrariamente determinadas por los organismos directores de la política económica, se tiene que el modelo escogido o no refleja correctamente la realidad y debe modificarse, o erróneamente se ha tomado como meta a una variable exógena.

En los modelos de crecimiento económico, la variable que usualmente se selecciona como meta es el Ingreso Nacional, por lo tanto recibe valores que representan las aspiraciones de los organismos directores de la economía.

- 3) Respecto a las otras variables interesa conocer si son endógenas, caso en el que no hace falta ningún otro análisis; o si son exógenas, caso en el que es preciso determinar su posible evolución.
- b) Evaluación de las condiciones existentes al momento de iniciar la aplicación de la política económica; estimación de la evolución posible de las variables exógenas que no se han considerado entre los medios; y, en el caso de que el modelo se haya expresado con notación matemática, de los parámetros que aparecen en las ecuaciones.
- c) Partiendo de los datos sobre las condiciones existentes y sobre las variables exógenas que no son medios, se debe determinar los valores de las metas, y utilizando estos valores, y las relaciones entre metas y medios, se debe determinar las características que se debe dar a los medios para alcanzar las metas.

Especificadas las características que se debe dar a los medios, se terminan las funciones de la Planificación Económica y debe continuarse con la ejecución de los Planes, lo que constituye otro de los aspectos de la Política Económica.

IV. UN MODELO DE CRECIMIENTO ECONOMICO.

Se presenta a continuación el sistema de ecuaciones que constituyen una expresión detallada del modelo de crecimiento económico que aparece esbozado en la Sección I.

El sistema de ecuaciones está formado por las siguientes:

$$(1) \quad Y_{T_i} = C_{T_i} + I_{T_i}^B + L_i$$

$$(2) \quad C_{T_i} = C_{N_i} + C_{M_i}$$

$$(3) \quad I_{T_i}^B = I_{N_i}^B + I_{M_i}^B$$

$$(4) \quad I_{T_i}^B = I_{T_i}^N + d_i$$

$$(5) \quad I_{T_i}^N = I_{T_i}^{NI} + I_{T_i}^A$$

$$(6) \quad DI_{T_i}^N = DI_{T_i}^{NI} + D I_{T_i}^A$$

$$(7) \quad I_{T_i}^I = I_{T_i}^{NI} + d_i$$

$$(8) \quad I_{T_i}^I = I_{N_i}^I + I_{M_i}^I$$

$$(9) \quad I_{T_i}^A = I_{N_i}^A + I_{M_i}^A$$

$$(10) \quad I_{N_i}^B = I_{N_i}^I + I_{N_i}^A$$

$$(11) \quad I_{N_i}^A = \frac{I_{N_i}^B - 1}{I_{T_i}^B - 1} I_{T_i}^A$$

$$(12) \quad DI_{T_i}^{NI} = e_{T_i}^I I_{T_{i-1}}^N \frac{DY_i}{Y_{i-1}}$$

$$(13) \quad d_i = r_i K_{i-1}$$

$$(14) \quad M_i = C_{M_i} + I_{M_i}^B + Z_i$$

$$(15) \quad K_i = K_{i-1} + I_{T_i}^N$$

$$(16) \quad DC_{N_i} = e_{I_i}^c C_{N_{i-1}} \frac{DI_{N_i}^I + DI_{N_i}^A}{I_{N_{i-1}}^B}$$

$$(17) \quad DC_{T_i} = e_{T_i}^c C_{T_{i-1}} \frac{DY_i}{Y_{i-1}}$$

$$(18) \quad DY_i = DC_{N_i} + DI_{N_i}^I + DI_{N_i}^A + DX_i - DZ_i$$

$$(19) \quad I_{T_{i-1}}^N = m_i DC_{N_i} + b_i DI_{N_i}^I + b_i' DI_{N_i}^A + c_i DX_i$$

$$(20) \quad DZ_i = w_i DC_{N_i} + h_i DI_{N_i}^I + h_i' DI_{N_i}^A + k_i DX_i$$

$$(21) \quad I_{T_i}^N = \frac{m_i e_I^c C_{N_{i-1}} + b_i I_{N_{i-1}}^B}{(1-w_i) e_I^c C_{N_{i-1}} + (1-h_i) I_{N_{i-1}}^B} \left[ DY_{i+1} - (1-k_i) DX_{i+1} \right] +$$

$$+ c_i DX_{i+1}$$

$$(22) \quad m_i = [s_i] [DP_i^c]'$$

$$(23) \quad b_i = [s_i] [DP_i^I]'$$

$$(24) \quad b_i^! = \begin{bmatrix} s_i \\ DP_i^A \end{bmatrix}^!$$

$$(25) \quad c_i = \begin{bmatrix} s_i \\ DP_i^X \end{bmatrix}^!$$

$$(26) \quad w_i = (1) \begin{bmatrix} B \\ DP_i^C \end{bmatrix}^!$$

$$(27) \quad h_i = (1) \begin{bmatrix} B \\ DP_i^I \end{bmatrix}^!$$

$$(28) \quad h_i^! = (1) \begin{bmatrix} B \\ DP_i^A \end{bmatrix}^!$$

$$(29) \quad k_i^! = (1) \begin{bmatrix} B \\ DP_i^X \end{bmatrix}^!$$

El significado de los símbolos empleados en las ecuaciones es el siguiente:

i = año  $i = 1, \dots, l.$

T = total.

N subscripto = nacional

N = superescrito = neto

N.I = neto inducido.

I = superescrito = inducido (excepto cuando es superescrito respecto a "e").

A = autónomo

B = valor bruto

M subscripto = importado

D antepuesto = incremento

Y = producto nacional bruto

C = consumo

I = inversión

X = exportaciones

M = importaciones

d = depreciación

K = capital nacional

Z = importación de intermedios

L = saldo de la balanza de pagos

- $r$  = tasa de depreciación  
 $e_I^c$  = elasticidad del consumo nacional respecto a la inversión inducida nacional.  
 $e_T^c$  = elasticidad del consumo total respecto a  $Y$ .  
 $e_T^I$  = elasticidad de la inversión neta inducida total respecto a  $Y$ .

Las definiciones de  $m$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $e$ ,  $w$ ,  $h$ ,  $h'$  y  $k$ , están dadas por las ecuaciones de la (22) a la (29). Para analizar dichas ecuaciones debe recordarse que se supone a la economía que se estudia dividida en  $n$  sectores entre los que existen relaciones interindustriales, y el sector independiente de demanda final. Cuando se desee denotar el valor de una de las variables que aparecen en las ecuaciones de la (1) a la (29), en uno de los  $n$  sectores de la economía, se usará un subscrito colocado antes de la variable, así  ${}_j K_i$  significa el capital en el sector  $j$  y en el año  $i$ .

La notación de las ecuaciones (22) a (29) tiene el significado que se indica a continuación:

$[s_i] = \left[ \frac{{}_j K_{-1}^K}{{}_j Q^P} \right]$  donde  ${}_j K_{-1}^K$  es el capital nacional en el año  $-1$ , y en el sector  $j$ ;  ${}_j Q^P$  es la producción nacional total (productos intermedios más demanda final) del sector  $j$  en el año  $0$ .  $[s_i]$  es un vector fila de dimensión  $(1, n)$ , cuyos componentes son las relaciones capital-producción total en el año  $0$ .

$[DP_i^C]$  es el vector columna de dimensiones  $(n, 1)$  cuyos componentes son los incrementos  ${}_j DP_i^C$  de producción total (demanda final e intermedios) originados en los sectores  $j$   $j = 1, \dots, n$ , por un incremento  $DC_{N_i} = 1$ .

Para aclarar el significado de  $[DP_i^C]$  es útil la siguiente notación adicional:

$[A]^{-1} = \left[ [1] - [a] \right]^{-1}$  siendo  $[1]$  la matriz unitaria de orden  $n$ , y  $[a]$  la matriz de los coeficientes técnicos de producción nacional. Los elementos de la matriz  $[A]^{-1}$  serán denotados por  $A_{hj}$ , luego  $[A]^{-1} = [A_{hj}]$

$[DC_{N_i}]$  es el vector columna de dimensiones  $(n, 1)$  cuyos componentes son los incrementos del consumo nacional en cada sector de la eco-

nomía. Como se verá posteriormente, para el cálculo de los componentes de  $\left[DC_{N_i}\right]^1$  se utilizan las elasticidades  $j^e_{N_0}$ , en el año 0 del consumo de bienes nacionales en el sector  $j$  respecto al consumo total de bienes nacionales.

Usando la notación adicional presentada, se puede escribir

$$\left[DP_i^0\right] = \left[A\right]^{-1} \left[DC_{N_i}\right] \text{ con } (1) \left[DC_{N_i}\right]^1 = 1$$

siendo

(1) el vector fila de orden  $(1, n)$  cuyos componentes son iguales a la unidad.

Para uso posterior es interesante expresar la ecuación (22) de la siguiente forma:

$$(30) \quad m_i = \sum_{j=1}^n j^m_i = \sum_{j=1}^n j^{DP_i^0} \frac{j^{K-1}}{j^{P_0}}$$

relación que claramente permite ver que  $m_i$  es la inversión total necesaria para que sea posible un incremento  $DP_i^0$  de la producción total nacional necesario para atender  $DC_{N_i}$ .

$\left[DP_i^I\right]$  es el vector columna de dimensiones  $(n, 1)$  cuyos componentes son los incrementos de producción total originados por un incremento  $DI_{N_i}^I = 1$ .

Para el cálculo de este vector es necesario conocer los valores de los componentes  $j^{DI_{N_i}^I}$  del vector de dimensiones  $(n, 1)$ ,

$\left[DI_{N_i}^I\right]^1$  esto es los valores de los incrementos de la inversión nacional por sectores correspondientes a  $DI_{N_i}^I = 1$ .

Posteriormente se indicarán métodos de cálculo para dichos componentes.

En forma similar a la usada para el consumo, pueden definirse  $\left[DP_i^A\right]^1$  para el caso de la inversión inducida los elementos  $j^b_i$ . tiene igual significado que  $\left[DP_i^I\right]^1$  refiriéndose a  $DI_{N_i}^A = 1$ . También en este caso es necesario introducir, y suponer conocidos los componentes del vector

$\left[DI_{N_i}^A\right]^1$  para el caso en que  $DI_{N_i}^A = 1$ .

Como en el caso de la inversión inducida, pueden definirse los elementos  $j_i^{b'}$ .

$[DP_i^x]^1$  se define por  $[DP_i^x]^1 = [A]^{-1} [DX_i]^1$  con (1)  $[DX_i]^1$  donde

$[DX_i]^1$  es el vector columna de dimensiones  $(n,1)$  cuyos componentes son los incrementos de las exportaciones por sectores.

Como es el caso del consumo se puede escribir

$$(31) \quad c_i = \sum_{j=1}^n S_j c_{ij} = \sum_{j=1}^n j DP_i^x \frac{j^K - 1}{j P_0}$$

De acuerdo con las definiciones presentadas de los elementos que intervienen en las ecuaciones de la (22) a la (25),  $m_i$ ,  $b_i$ ,  $b_i'$  y  $c_i$  son los incrementos de capital necesarios para atender un incremento de la producción total originada por  $DC_{N_i} = DI_{N_i}^I = DI_{N_i}^A = DX_i = 1$ . Si se conoce  $[A]$  para un año dado, y se dispone de métodos para distribuir los incrementos unitarios en referencia entre los diversos sectores de la economía, los valores de  $m_i$ ,  $b_i$ ,  $b_i'$  y  $c_i$  quedan determinados.

$[B]$  es la matriz de coeficientes técnicos de importación.

De las ecuaciones (25) a (29) se concluye que  $w$ ,  $h$ ,  $h'$  y  $k$  son los incrementos en la importación de insumos originados por los incrementos de producción total debidos a incrementos unitarios del consumo e inversión nacionales, y de las exportaciones. Si se conocen los valores necesarios para determinar  $m$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $c$ , y la matriz  $[B]$ , los valores de  $w$ ,  $h$ ,  $h'$ ,  $k$  también quedan determinados.

Para facilitar la expresión, y siempre que sea posible sin mayor pérdida de claridad, en lugar de hacer referencia separadamente a  $I^I$  e  $I^A$ , se hará referencia a  $I^B$ .

Para terminar la presentación del modelo debe indicarse los valores que se consideran conocidos: sea como datos iniciales o como parámetros, y los que son incógnitas en las ecuaciones.

Datos iniciales necesarios para la determinación de los valores de las variables para  $i = 1, \dots, l$  son todos los valores que aparecen en las ecuaciones de (1) a (29) para  $i = 0$ .

Se consideran parámetros a los valores  $e_T^I$ ,  $e_T^c$ ,  $e_I^c$ ,  $j^{e_{N_i}}$ ,  $r_i$ ,  $[s_i]$ ,  $[A]^{-1}$  y  $[B]$ . El valor de cada uno de estos elementos se toma como constante e igual al que presentan para  $i = 0$ .

De acuerdo a las definiciones dadas anteriormente, los elementos que constituyen  $[s_i]$  varían de año en año. Es fácil demostrar que siendo las modificaciones marginales iguales al valor inicial, no se altera dicho valor inicial con los cambios marginales.

Por otra parte debe observarse que las relaciones existentes entre incrementos y variables constituyen otras tantas ecuaciones. Así pueden establecerse 11 ecuaciones del tipo

$$Y_i = Y_{i-1} + DY_i,$$

entre totales e incrementos de las variables:  $Y_i$ ,  $C_{N_i}$ ,  $C_{T_i}$ ,  $I_{T_i}^{N.I}$ ,  $I_{N_i}^I$ ,  $I_{N_i}^A$ ,  $Z_i$ ,  $X_i$ ,  $X_{i+1}$ ,  $I_{T_i}^N$ ,  $I_{T_i}^A$ . Estas ecuaciones se denominarán auxiliares. Por lo tanto, en total se tiene 40 ecuaciones.

Las variables que aparecen en el sistema de ecuaciones se encuentran en la Tabla 1, en la que se indica también el tipo de cada una de ellas.

012492

T A B L A 1

VARIABLES QUE APARECEN EN EL MODELO

Año	Variables	Características de las Variables	
		Sin Planificación	Con Planificación
<u>Referentes al Producto Nacional Bruto</u>			
i-1	$Y_{i-1}$	Predeterminada	Predeterminada
i	$Y_i$	End.	End.
	$DY_i$	End.	End.
i + 1	$DY_{i+1}$	No aparece	Exógena

Referentes al Consumo

i-1	$C_{T_{i-1}}$	Predeterminada	Predeterminada
	$C_{N_{i-1}}$	Predeterminada	Predeterminada
i	$C_{T_i}$	End.	End.
	$DC_{T_i}$	End.	End.
	$C_{N_i}$	End.	End.
	$DC_{N_i}$	End.	End.
	$C_{M_i}$	End.	End.
	$m_i$	End.	End.
	$w_i$	End.	End.

Referentes a la Inversión

i-1	$I_{T_{i-1}}^B$	Predeterminada	Predeterminada
	$I_{N_{i-1}}^B$	Predeterminada	Predeterminada

	$I_{N_{i-1}}$	Predeterminada	Predeterminada
	$I_{T_{i-1}}^{NI}$	Predeterminada	Predeterminada
	$I_{T_{i-1}}^A$	Predeterminada	Predeterminada
	$I_{T_{i-1}}^N$	Predeterminada	Predeterminada
	$I_{N_{i-1}}^A$	Predeterminada	Predeterminada
i	$I_{T_i}^B$	End.	End.
	$I_{N_i}^B$	End.	End.
	$I_{M_i}^B$	End.	End.
	$I_{T_i}^I$	End.	End.
	$I_{N_i}^I$	End.	End.
	$DI_{N_i}^I$	End.	End.
	$I_{M_i}^I$	End.	End.
	$I_{T_i}^N$	End.	End.
	$DI_{T_i}^N$	End.	End.
	$I_{T_i}^{NI}$	End.	End.
	$DI_{T_i}^{NI}$	End.	End.
	$I_{T_i}^A$	Exógena	End.

	$DI_{Ti}^A$	End.	End.
	$I_{Ni}^A$	End.	End.
	$DI_{Ni}^A$	End.	End.
	$I_{Mi}^A$	End.	End.
	$b_i$	End.	End.
	$b'_i$	End.	End.
	$h_i$	End.	End.
	$h'_i$	End.	End.

Referentes a la Depreciación

i	$d_i$	End.	End.
---	-------	------	------

Referentes al Capital

i-1	$K_{i-1}$	Predeterminada	Predeterminada
i	$K_i$	End.	End.

Referentes a la Importación Total

i	$M_i$	End.	End.
---	-------	------	------

Referentes a la Importación de Insumos

i-1	$Z_{i-1}$	Predeterminada	Predeterminada
i	$Z_i$	End.	End.
	$DZ_i$	End.	End.

Referentes al Saldo de la Balanza de Pagos

i	$L_i$	End.	End.
---	-------	------	------

Referentes a las Exportaciones

i-1	$X_{i-1}$	Predeterminada	Predeterminada
i	$X_i$	Exógena	Exógena
	$DX_i$	End.	End.
	$c_i$	End.	End.

	$k_i$	End.	End.
$i+1$	$X_{i+1}$	No aparece	Exógena
	$DX_{i+1}$	No aparece	End.

La proporción existente entre ecuaciones y variables aparece en la Tabla 2.

T A B L A 2

Número de ecuaciones y de variables en el modelo

Sin Planificación			Con Planificación		
Ecuaciones	Variables		Ecuaciones	Variables	
Ecuaciones 38	Predeterminada	13	Ecuaciones 40	Predeterm.	13
	Exógenas	2		Exógenas	3
	Endógenas	37		Endógenas	39
	Total	52		Total	55

V. DISCUSION DE LOS ASPECTOS MATEMATICOS DEL MODELO.

El modelo presentado en la sección IV es una expresión más detallada del usado como ejemplo en las primeras secciones. En el ejemplo a que se hace referencia puede observarse que la evolución de los hechos económicos se origina dentro del mismo sistema. Es de desear que esta característica se encuentre también en el modelo presentado en la sección IV.

Para ello es necesario que los datos conocidos y las ecuaciones sean suficientes para determinar los valores desconocidos de las variables. Una condición necesaria y suficiente para que esto sea posible es que el número de ecuaciones sea igual al de incógnitas, y que las ecuaciones sean independientes.

De acuerdo a lo indicado en la Sección II, debe estimarse el valor de las variables exógenas en forma independiente al modelo, y como condición previa a su uso para determinar los valores de las variables endógenas. Luego las variables exógenas deben considerarse como datos.

En la presentación del modelo se hace referencia a que es necesario conocer todos los valores  ${}_jDX_i$  para  $j = 1, \dots, l$ . Sobre este punto es necesario insistir, pudiendo decirse que todos los valores mencionados son variables exógenas; pero, no se los cuenta como tales por no aparecer explícitamente.

Del valor que corresponde a  $I_{T_i}^A$  se discutirá posteriormente; igual cosa para  $DY_{i+1}$ .

Además, entre las variables a que se hace referencia en la Tabla 2, aparecen 13 llamadas predeterminadas, esto es, sus valores han sido determinados para períodos anteriores al que se estudia, y son por lo tanto datos para resolver las ecuaciones y obtener los valores desconocidos de las variables, para el período en estudio.

Deduciendo del número total de variables, el de las exógenas y de las predeterminadas se observa que el número de variables cuyos valores deben determinarse es menor en uno que el de ecuaciones. Siendo la condición requerida para que los valores de las variables endógenas puedan determinarse utilizando el sistema de ecuaciones,

que el número de tales variables sea igual al de ecuaciones, y éstas sean independientes, es preciso estudiar el sistema de ecuaciones desde el punto de vista de la independencia.

Es fácil observar que el sistema formado por las ecuaciones (5), (6) y las auxiliares correspondientes a las variables que aparecen en las mismas ecuaciones, contiene una ecuación que no es independiente de las restantes. Descartada una de tales ecuaciones, se reduce el modelo a un sistema con tantas ecuaciones como variables a determinar.

No se discutirá aquí el problema de la independencia de las ecuaciones restantes que aparecen en el modelo, sin embargo, una verificación empírica de que tienen esta propiedad, es el ejemplo numérico que se presenta en la última sección del presente trabajo.

VI. DISCUSION DE LOS ASPECTOS ECONOMICOS DEL MODELO.

Para que la expresión de un modelo económico sea correcta, debe, entre otras propiedades, ser completa, esto es debe incluir todos los detalles necesarios para su comprensión.

Parte con el objeto de cumplir este requisito, y parte con el de utilizar un método de expresión menos consiso que el matemático y más facilmente entendible, se discuten algunas de las características del modelo presentado en la sección IV.

a) Comparación de Ecuaciones y Variables según se suponga o no planificación.

En las tablas 1 y 2 se ve que tanto el número como la naturaleza de las variables exógenas, así como el número de las ecuaciones cambia según se considere o no planificación.

En la tabla 3 se comparan los elementos del modelo tomando en cuenta si se presentan o no en los dos casos en consideración. Para completar la información contenida en esta tabla, y antes de discutirla, es preciso indicar que la ecuación (21) solo puede usarse para determinar  $I_{T_i}^N$  a partir del valor de  $DY_{i+1}$ , pero que conocido  $I_{T_i}^N$  no cabría utilizarla para evaluar  $DY_{i+1}$ .

Tabla 3

COMPARACION DE ECUACIONES Y VARIABLES SEGUN SE SUPONGA O NO PLANIFICACION

Elementos que no aparecen cuando no se supone planificación		Comparación de variables exógenas	
Ecuaciones	Variables	Sin Planificación	Con Planificación
(21)	$DY_{i+1}$	$X_i$	$DY_{i+1}$
$X_{i+1} = X_i + DX_{i+1}$	$X_{i+1}$	$I_{T_i}^A$	$X_{i+1}$
	$DX_{i+1}$		$DX_{i+1}$

De acuerdo a la naturaleza del modelo de crecimiento económico presentado en la sección I como ejemplo, tanto cuando no se supone planificación como cuando se la supone, debe aparecer  $X_i$  como variable exógena.

Al introducir  $I_{T_i}^A$  explícitamente en el modelo se pone en práctica lo indicado en la sección III.

Cuando no se supone planificación, de acuerdo con la definición de variable exógena, puede considerarse como tal a la  $I_{T_i}^A$ ; y, por otra parte, es lógico que su valor sea cero. Posteriormente se verificará que esto implica que todas las formas de inversión autónoma o son iguales o cero; o, cuando ha existido algún valor de la inversión autónoma en el período  $(i-1)$ ,  $I_{T_i}^A = 0$ , implica que los incrementos de la inversión autónoma son de magnitud igual pero de signo contrario a los valores existentes en el año  $(i-1)$ .

Por otra parte, siendo la  $I_{T_i}^A$ , el medio de que disponen los organismos directores de la política económica para alcanzar las metas, expresadas como valores del Producto Nacional Bruto, es consistente con las definiciones considerar a la  $I_{T_i}^A$  como variable endógena; y necesario incluir ecuaciones que relacionen la meta  $DY_{i+1}$  con el medio  $I_{T_i}^A$ , ecuaciones que deben utilizarse sobre en el caso en que existe planificación. Lo anterior es la justificación de la ecuación, (21), y de la restricción adicional impuesta sobre ella que indica que no debe usarse para estimar  $DY_{i+1}$  cuando se conoce  $I_{T_i}^A$ .

Puede ser útil mencionar que las ecuaciones que permiten verificar que todas las inversiones autónomas son cero cuando se supone  $I_{T_i}^A = 0$ , son las que permiten estimar  $I_{T_i}^A$  cuando se ha obtenido  $I_{T_i}^N$  con la ecuación (21).

La discusión anterior debe ser suficiente para justificar la introducción de  $DY_{i+1}$  como variable exógena cuando se supone planificación.

Tanto en el caso en que se supone planificación, como cuando no se la supone, los valores de  $X_i$   $i = 1, \dots, l$  son datos. La conveniencia de utilizar  $DX_{i+1}$  en la ecuación (21) se observa al obte-

nerla por un procedimiento que se presenta posteriormente. Siendo conocido el valor de  $DX_{i+1}$ , y pareciendo conveniente usarlo, su utilización, y la introducción de la ecuación auxiliar que permite hacerlo, sólo cuando se supone planificación, queda justificada.

b) Estudio de las ecuaciones que aparecen en el modelo.

Usualmente se clasifica las ecuaciones de un modelo económico de la siguiente forma:

- 1.- Identidades contables: En el modelo que se encuentra en la sección IV, pertenecen a este tipo las ecuaciones (1) a (10), (14), (15) y (18). No se presentará ningún análisis adicional respecto a las ecuaciones mencionadas.
- 2.- Ecuaciones de comportamiento: Se tienen las ecuaciones (11) a (13), (16), (17) y (21).

La ecuación (11) expresa la relación existente entre inversiones autónomas total y nacional. Esta relación, como la existente entre inversiones inducidas total y nacional, recibe fuerte influjo de factores tecnológicos, especialmente si los bienes de capital nacionales no pueden sustituir a los importados, como es el caso en los países subdesarrollados.

De acuerdo a lo indicado, se puede suponer que la proporción existente entre inversiones netas nacional y total en el año  $(i-1)$  se conservará en el año  $i$  para la inversión autónoma.

A pesar de que lo indicado se refiere a la inversión neta, se usa en la ecuación (11) la inversión bruta porque, tanto en la teoría como en la práctica, es difícil determinar el monto de la depreciación, y más difícil aún distribuirla entre nacional e importada.

Las ecuaciones, (12) y (17) expresan las relaciones existentes entre inversión neta total y consumo total respectivamente con el Producto Nacional Bruto.

Estas dos ecuaciones parten de los supuestos de que las preferencias de inversores y consumidores son constantes, igual cosa para los precios y los bienes que pueden adquirirse en el mercado.

La ecuación (12) presenta una característica no usual: relaciona el incremento  $D \frac{I_T^{NI}}{I_T^N}$  con  $I_T^{NI}$ , en lugar de con  $I_T^{NI}$ .

La diferencia entre la inversión neta y la neta inducida es la inversión autónoma. Como la ecuación (12) expresa la relación existente entre las inversiones existentes, y el crecimiento del Producto Nacional Bruto con la inversión inducida, es mejor utilizar el total de la inversión neta que actúa en el período. El razonamiento anterior conduciría a utilizar  $K_{i-1}$  en lugar de  $I_{T,i-1}^N$ , forma en que la ecuación (12) es más correcta. Se evitó el uso del capital porque su estimación para la aplicación del modelo es menos precisa en la generalidad de los casos.

Además una ecuación similar a la (12) y la (17) sirven de base a la (16). Para verificarlo considérese el sistema de ecuaciones formado por la (17) y las siguientes:

$$DI_{T_i}^B = e_T^I \quad I_{T,i-1}^B \quad \frac{DY_i}{Y_{i-1}} \quad (32)$$

$$DI_{N_i}^B = e_N^I \quad I_{N,i-1}^B \quad \frac{DI_{T_i}^B}{I_{T,i-1}^B} \quad (33)$$

$$DC_{N_i} = e_N^c \quad C_{N,i-1} \quad \frac{DC_{T_i}}{C_{T,i-1}} \quad (34)$$

donde  $e_N^I$  y  $e_N^c$  denotan respectivamente las elasticidades de la inversión y consumo nacionales respecto a inversión y consumo totales.

Sustituyendo  $DI_{T_i}^B$  y  $DC_{T_i}$  en las ecuaciones (33) y (34) por los valores que tienen en las ecuaciones (32) y (17) se expresan  $DI_{N_i}^B$  y  $DC_{N_i}$  como funciones de  $\frac{DY_i}{Y_{i-1}}$ .

Utilizando la relación entre  $DI_{T_i}^B$  y  $\frac{DY_i}{Y_{i-1}}$  que acaba de obtenerse, puede expresarse este valor como función de  $\frac{DI_{T_i}^B}{I_{T,i-1}^B}$ ; valor que sustituido en  $DC_{N_i}$  como función de  $\frac{DY_i}{Y_{i-1}}$  da como resultado

$$DC_{N_i} = \frac{e_T^c e_N^c}{e_T^I e_N^I} C_{N_{i-1}} \frac{DI_{N_i}^B}{I_{N_{i-1}}^B} \quad (35)$$

ecuación de la que se obtiene (16).

La importancia de la ecuación (16) radica en que permite conocer como se divide entre consumo e inversión nacionales con incremento del Producto Nacional Bruto.

Las ecuaciones (33) y (34) pueden añadirse al sistema presentado en la Sección IV para estimar  $e_{N_i}^I$  y  $e_{N_i}^c$  de año en año. Para simplificar los cálculos se ha preferido suponer que los valores del coeficiente de elasticidad en (35) se modifican de manera que  $e_I^c$  de (16) permanece constante.

Se emplea la ecuación (32) en lugar de la (12) para obtener la (16) porque el volumen de la producción nacional que incrementa el Producto Nacional Bruto debe dividirse entre consumo nacional e inversión bruta y no neta. Si se prefiere utilizar la ecuación (12) por ser más correcta, se debe añadir a  $DI_{T_i}^{NI}$  los valores de  $Dd_i$  y  $DI_{T_i}^A$  para llegar a una ecuación que en forma más exacta exprese lo que la (32).

Para obtener la ecuación (21) se utiliza que las ecuaciones (16), (18), (19) y (20) forman un sistema que permite expresar  $I_{T_{i-1}}^N$  como función de  $DY_i$ .

Para ello, eliminando  $DZ_i$  con las ecuaciones (18) y (20) se obtiene

$$DY_i = (1-w_i) DC_{N_i} + (1-h_i) DI_{N_i}^I + (1-h_i') DI_{N_i}^A + (1-h_i) DX_i \quad (36)$$

Con la ecuación (16) se elimina de (36)  $DC_{N_i}$  y se obtiene

$$DI_{N_i}^I = \frac{[DY_i - (1-k_i)DX_i] I_{N_{i-1}}^B - [(1-w_i)e_I^c C_{N_{i-1}} + (1-h_i') I_{N_{i-1}}^B] DI_{N_{i-1}}^A}{(1-w_i)e_I^c C_{N_{i-1}} + (1-h_i) I_{N_{i-1}}^B} \quad (37)$$

La ecuación (37) es aproximadamente igual a

$$DI_{N_i}^I = \frac{[DY_i - (1-k_i)DX_i] I_{N_{i-1}}^B}{(1-w_i)e_I^c C_{N_{i-1}} + (1-h_i) I_{N_{i-1}}^B} - DI_{N_i}^A \quad (38)$$

Las ecuaciones (16) y (19), y una simplificación similar a la usada en (37) permiten expresar:

$$DI_{N_i}^I = \frac{\left[ I_{T_{i-1}}^N - c_i DX_i \right] I_{N_{i-1}}^B}{m_i e_I^c C_{N_{i-1}} + b_i I_{N_{i-1}}^B} - DI_{N_i}^A \quad (39)$$

Utilizando las ecuaciones (38) y (39) se verifica que

$$I_{T_{i-1}}^N = \frac{m_i e_I^c C_{N_{i-1}} + b_i I_{N_{i-1}}^B}{(1-w_i) e_I^c C_{N_{i-1}} + (1-h_i) I_{N_{i-1}}^B} \left[ DY_i - (1-k_i) DX_i \right] + c_i DX_i \quad (40)$$

Es fácil verificar que el coeficiente del término entre corchetes en (40) es prácticamente constante de año a año, luego, como una aproximación puede escribirse la ecuación (21).

- 3.- Ecuaciones determinadas por factores tecnológicos: Pertenecen a este grupo las ecuaciones restantes (19), (20) y (22) a (29).

La ecuación (19) expresa la relación existente entre inversión neta e incremento de la producción total. En lo que sigue, para facilitar la expresión, a pesar de que se pierde en claridad, no se distingue con precisión entre  $I^B$ ,  $I^I$  e  $I^A$ . En general, se supone que los valores de la inversión autónoma distribuidos por sectores, son conocidos. Por la forma en que está concebida implica los siguientes supuestos:

- a) Utilización plena de las capacidades instaladas y de sus incrementos anuales; esto es, cualquier aumento del  $C_N$ ,  $I_N^B$ , o  $X$  requiere de un incremento del capital instalado.
- b) Período de maduración de las inversiones constante e igual a un año; esto es, las inversiones en un año dado incrementan la producción del siguiente.
- c) Las inversiones incrementan el capital por sectores exactamente en el volumen necesario para atender los incrementos de producción total requeridos por los aumentos de  $C_N$ ,  $I_N^B$ , o  $X$ .

En efecto, si el incremento de inversión en el año  $(i-1)$  y en el sector  $j$  es diferente de

$$j^m_i + j^b_i + j^{b'}_i + j^c_i$$

(ver sección IV), el sector  $j$  no tendría capital suficiente para atender el volumen de producción necesario para satisfacer los incrementos de demanda final.

En caso que se suponga que la distribución de  $I_{T_i}^N$  difiere de la óptima, y sea posible estimar los valores de  $j^I_{T_{i-1}}^N$  para  $j = 1, \dots, n$ , se puede adoptar el siguiente procedimiento para estimar el incremento de producción que se usará en la demanda final originado por  $I_{T_{i-1}}^N$  distribuida entre los sectores en la forma supuesta.

Se pueden plantear  $n$  ecuaciones de la forma:

$$j^I_{T_{i-1}}^N = j^m_i + j^b_i + j^{b'}_i + j^c_i. \quad (41)$$

Los valores de  $j^c_i$  se suponen conocidos por ser funciones de  $j^{DX}_i$ .

Es posible convertir  $j^m_i$  en función de  $j^{DI}_{N_i}^B$  para  $j = 1, \dots, n$ , expresando en (30)  $j^{DC}_{N_i}$  con

$$j^{DC}_{N_i} = j^e_N \cdot j^c_{N_{i-1}} \cdot \frac{DC_{N_i}}{C_{N_{i-1}}},$$

sustituyendo  $DC_{N_i}$  por su valor en (16) y reemplazando  $DI_{N_i}^B$  por

$$DI_{N_i}^B = \sum_{j=1}^n j^{DI}_{N_i}^B$$

Con las sustituciones indicadas el sistema de  $n$  ecuaciones en (41) se transforma en un sistema con  $n$  incógnitas  $j^{DI}_{N_i}^B$ .

Un método para estimar los incrementos  $j^{DI}_i^{NI}$  por sectores consistente con el significado de la ecuación (19), es el siguiente:

Las necesidades de inversión neta en el sector  $j$  son proporcionales a

$$j^m_i + j^c_i$$

por lo tanto se pueden determinar los componentes del vector

$\begin{bmatrix} DI_{N_i}^{NI} \end{bmatrix}$  de manera que

$$j DI_{N_i}^{NI} = \frac{j^m_i + j^c_i}{\sum_j (j^m_i + j^c_i)} \quad (42)$$

y con estos valores determinar los elementos necesarios para estimar  $b_i$  y  $b'_i$ . Con estas estimaciones es más aceptable el uso de la ecuación (19), sin embargo, cuando no se supone planificación, parece difícil que se cumplan las condiciones de la ecuación (42).

Por último otra fuente de error que limita el uso de la ecuación (19) aun cuando se emplee la (42), es que esta última ecuación no toma en cuenta que la distribución  $j DI_{N_i}^{NI}$  de los incrementos de la inversión neta inducida en el año  $i$ , debe hacerse para satisfacer las necesidades de inversión en el año  $i + 1$ .

La (20) quiere decir que la demanda final de productos nacionales determina el volumen de insumos que se requiere importar.

Es posible e interesante estudiar las ecuaciones (18) y (20) desde el lado de la producción.

Sustituyendo en la ecuación (18) el valor de  $DZ_i$  que se encuentra en la ecuación (20), se obtiene:

$$DY_i = (1-w_i) DC_{N_i} + (1-h_i) DI_{N_i}^B + (1-k_i) DX_i.$$

Considerando la producción de una unidad económica, el Producto Nacional Bruto es igual a la Producción Total (intermedios más demanda final) menos los insumos utilizados en dicha producción.

De acuerdo a las definiciones antes presentadas, la producción total originada por incrementos en el consumo nacional, las inversiones nacionales y las exportaciones, esta dada por la ecuación.

$$(1) \quad [A]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} DC_{N_i} \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} DI_{N_i}^B \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} AX_i \end{bmatrix}' \right\}.$$

Los insumos nacionales utilizados para esta producción total son

$$(1) \quad [a] [A]^{-1} \left\{ [DC_{N_i}]' + [DI_{N_i}^B]' + [DX_i]' \right\};$$

y los insumos importados

$$(1) \quad [B] [A]^{-1} \left\{ [DC_{N_i}]' + [DI_{N_i}^B]' + [DX_i]' \right\}.$$

Luego:

$$DY_i = (1) \left\{ [1] - [a] - [B] \right\} [A]^{-1} \left\{ [DC_{N_i}]' + [DI_{N_i}^B]' + [DX_i]' \right\}$$

Pero, de acuerdo a la definición de  $[A]^{-1}$ , se tiene que

$$\left\{ [1] - [a] \right\} [A]^{-1} = [1], \text{ por lo tanto}$$

$$DY_i = (1) \left\{ [1] - [B] [A]^{-1} \right\} \left\{ [DC_{N_i}]' + [DI_{N_i}^B]' + [DX_i]' \right\},$$

y esta expresión, en notación de matrices es igual a la antes presentada para  $DY_i$ .

Luego de la discusión de las ecuaciones de la (22) a la (29) presentada en la Sección IV, no hace falta ningún análisis adicional.

Para terminar debe observarse que un supuesto que afecta a todas las variables del modelo es el de Divisibilidad perfecta, esto es, se supone que cualquiera variable puede tomar cualquier valor fraccionario. Por ejemplo, en el caso de las inversiones el supuesto de la divisibilidad implica que puede aumentarse el capital instalado exactamente en la proporción requerida por el incremento del Producto Nacional Bruto.

## VII.- UTILIZACION DEL MODELO.

De acuerdo a lo indicado en las secciones III y IV, para utilizar un modelo para estudiar una economía haya o no un organismo planificador.

En el caso del modelo presentado en la sección IV, el estudio de la evolución económica se reduce al de la resolución del sistema de las ecuaciones de la (1) a la (29). Esta resolución varía según se considere o no un organismo planificador. A continuación se presenta un método para llevarla a cabo en cada una de las dos circunstancias.

a) Método de cálculo cuando no se supone planificación.

Los valores que se suponen conocidos son:

- 1) Los valores iniciales, esto es para  $i=0$ , de las variables que aparecen en las ecuaciones de la (1) a la (29).
- 2) Las de los parámetros  $e_{T_i}^I$ ,  $e_{T_i}^C$ , y  $e_{I_i}^C$ ,  $j^{e_{N_i}}$ ,  $r_i$ ,  $[s_i]$ ,  $[A]^{-1}$  y  $[B]$ .
- 3) El de la variable exógena  $X_i$  para  $i=1, \dots, m_i$  y de los componentes  ${}_j X_i$   $j=1, \dots, n$  de  $X_i$ .

El método de cálculo es el siguiente:

- 1) Considerando  $DC_{N_i} = 1$ , y utilizando las elasticidades  $j^{e_{N_i}}$ , se calculan los valores  ${}_j DC_{N_i}$  para  $j=1, \dots, n$ .

Empleando la ecuación (22) se calcula  $m_i$ , y con la ecuación (26) se obtiene  $w_i$ .

2) Siendo conocidos los valores de  ${}_j X_i$ , se pueden obtener los componentes de  $[DX_i]$  para  $DX_i = 1$ . Utilizando la ecuación (25) se calcula  $c_i$ , y con la ecuación (29) se obtiene  $h_i$ .

3) Utilizando los valores obtenidos de  $[DC_{N_i}]'$  y  $[DX_i]'$ , se puede aplicar la fórmula (42) para conocer las proporciones en que debe distribuirse  $DI_{N_i} = 1$  entre las componentes de  $[DI_{N_i}]'$ . Cuando se supone planificación se puede utilizar el mismo sistema para distribuir

$$DI_{N_i}^A$$

Determinado este vector, es posible utilizar las ecuaciones (23), (24), (27) y (28) para determinar  $b_i$ ,  $b'_i$ ,  $h_i$ , y  $h'_i$  respectivamente.

Los pasos 1), 2) y 3) permiten obtener los coeficientes de las ecuaciones (19) y (20).

4) Suponiendo que  $I_{T_i}^A = 0$ , la ecuación (11) permite verificar que  $I_{N_i}^A = 0$ , la (9) que  $I_{M_i}^A = 0$ , y las auxiliares referentes a la  $I_{T_i}^A$  y a la  $I_{N_i}^A$  que  $DI_{T_i}^A = -I_{T_{i-1}}^A$ , y que  $DI_{N_i}^A = -I_{N_{i-1}}^A$  respectivamente.

5) Considerando como valores conocidos a  $DI_{N_i}^A$ ,  $DX_i$  y  $I_{T_{i-1}}^N$ , las ecuaciones (16) y (19) constituyen un sistema que permite calcular  $DC_{N_i}$  y  $DI_{N_i}^I$ . Con las auxiliares se puede calcular  $C_{N_i}$  e  $I_{N_i}^I$ ; y con la ecuación (10),  $I_{N_i}^B$ .

6) Las ecuaciones (18) y (20) permiten evaluar  $DY_i$  y  $DZ_i$ ; y las auxiliares  $Y_i$  y  $Z_i$ .

Para los valores restantes, y en su orden, se puede usar el siguiente método:

Ecuación a usar

Variables que se calcula

(12)

$$DI_{T_i}^{NI}, \quad I_{T_i}^{NI}$$

(5)

$$I_{T_i}^N$$

(13)

$$d_i$$

(4)

$$I_{T_i}^B$$

(7)

$$I_{T_i}^I$$

(3)

$$I_{M_i}^B$$

(8)

$$I_{M_i}^I$$

- (15)  $K_{i-1}$
- (17)  $DC_{T_i}$ ,  $C_{T_i}$
- (2)  $C_{M_i}$
- (14)  $M_i$
- (1)  $L_i$

b) Método de cálculo cuando se supone planificación

Al discutir la planificación económica se indicó que correspondía a los organismos directores de la economía determinar las variables metas y los valores que éstas debían adquirir. Por lo tanto, de acuerdo al criterio de los organismos, cambiaran las variables que se tomarán como metas, y conforme se consideren como tales unas u otras, variará el método de cálculo que se use con el modelo presentado en la sección IV.

Siguiendo un criterio bastante general, se consideró como variable meta el Producto Nacional Bruto. Por lo tanto, entre los valores conocidos, además de los valores iniciales, de los parámetros, y de la variable exógena, se considerará a la variable meta  $Y_i$  para  $i = 1, \dots, 1$ . También por razones ya indicadas se incluye  $X_{i+1}$ , entre las variables exógenas necesarias para estimar los valores en el año  $i$ .

El método de cálculo es el siguiente:

1) Con procedimientos iguales a los usados para el caso en que no existe planificación se deben calcular los valores de  $m$ ,  $b$ ,  $b'$ ,  $c$ ,  $w$ ,  $h$ ,  $h'$  y  $k$ .

2) Utilizando  $DY_{i+1}$  y la ecuación (21) se calcula  $I_{T_i}^N$ , valor que permite obtener  $DI_{T_i}^N$ .

3) El siguiente paso consiste en resolver el sistema formado por las ecuaciones (6), (11), (12), (16), (18), (19), (20), y las auxiliares referentes a  $I_{T_i}^A$  e  $I_{N_i}^A$ . Estas nueve ecuaciones permiten

calcular  $DI_{T_i}^{NI}$ ,  $I_{T_i}^A$ ,  $DI_{T_i}^A$ ,  $DY_i$ ,  $I_{N_i}^A$ ,  $DI_{T_i}^B$ ,  $DC_{N_i}$ ,  $DI_{N_i}^I$  y  $DZ_i$ . Con

estos valores se puede calcular  $I_{T_i}^{NI}$ ,  $Y_i$ ,  $C_{N_i}$ ,  $I_{N_i}^I$ , y,  $Z_i$ .

Para los valores restantes, y en su orden, se puede usar el siguiente método:

<u>Ecuación a usar</u>	<u>VARIABLES que se calcula</u>
(10)	$I_{N_i}^B$
(13)	$d_i$
(4)	$I_{T_i}^B$
(7)	$I_{T_i}^I$
(8)	$I_{M_i}^I$
(3)	$I_{M_i}^B$
(15)	$K_i$
(17)	$DC_{T_i}$ , $C_{T_i}$
(2)	$C_{M_i}$
(14)	$M_i$
(1)	$L_i$

### VIII.- EJEMPLO NUMERICO

Como una aplicación del modelo discutido se presentan los resultados que pueden obtenerse utilizando los datos publicados en el Informe de la Junta Nacional de Planificación, Tomo I, Septiembre de 1,958. Se denotará esta publicación como el "Informe".

Se calcularán valores para un año a partir de 1955. En un caso se considerará que no existe planificación, en otro, que se ha fijado una meta de crecimiento del producto nacional bruto.

#### A) Datos a usarse.

##### 1.- Matriz de insumo-producto.

Se presenta a continuación el cuadro II-16 que aparece en el "Informe". (Ver Tabla 4 en la siguiente página).

En lo que sigue se describe el proceso utilizado para calcular  $[A]^{-1}$  y  $[B]$ .

La notación que se usará con relación a la matriz de Insumo-Producto es:

$j^P_i$  Producción nacional total (insumos más demanda final) del sector  $j$  en el año  $i$ .

$jh^P_i$  Producción nacional que el sector  $j$  vende al sector  $h$  en el año  $i$

$j^E_i = j^C_{N_i} + I^B_{N_i} + j^X_i$  Demanda final de bienes del sector  $j$  en el año  $i$ .

Por lo tanto

$$j^P_i = j^E_i + \sum_{h=1}^n jh^P_i \quad (43)$$

$j^Z_i$  Total de insumos importados en el sector  $j$  el año  $i$

$jh^Z_i$  Bienes del sector  $j$  que el sector  $h$  importa para usarlas como insumos en el año  $i$ .

Por lo tanto

$$j^Z_i = \sum_{h=1}^n jh^Z_i \quad (44)$$

TABLE 4

UNA ESTIMACION ESQUEMATICA DE LA ESTRUCTURA DE LA ECONOMIA ECUATORIANA EN 1955

(Valores en millones de sucres)

TRANSACCIONES INTER - INDUSTRIALES				DEMANDA FINAL				Disponibilidades totales.		
Composición de los insumos		Actividades primarias		Exportación	Consumo	Inversión	Total			
Distribución de la producción.		Industria manufacturera.	Servicios							
Actividades Primarias	Total	211	884	-	1,065	1,792	3,139	73	5,004	6,069
	Producción	207	612	-	819	1,792	3,103	71	4,966	5,785
	Importaciones	4	242	-	246	-	36	2	38	284
Industria Manufacturera	Total	296	1,061	218	1,575	65	3,181	736	3,982	5,557
	Producción	265	843	218	1,326	65	2,804	144	3,013	4,339
	Importaciones	31	218	-	249	-	377	592	969	1,218
Servicios	Total	1,518	478	-	1,996	214	2,847	997	4,058	6,054
	Producción	1,498	316	-	1,814	214	2,696	780	3,690	5,504
	Importaciones	20	162	-	182	-	151	217	368	550
Total de insumos	Total	2,025	2,393	218	4,636					
	Nacionales	1,970	1,771	218	3,959					
Importados	55	622	-	677						
Valor de la producción	5,785	4,339	5,504							15,628
Importaciones y Exportaciones.					2,071					2,052
Producto bruto consumo e inversión.	3,760	1,946	5,286		(19)	9,167	1,806			10,992
Consumo e inversiones nacionales.						8,603	995			
Consumo e inversión importados.						564	811			

Fuente: elaboraciones de la Junta de Planificación, con la colaboración de la CEPAL.

Los elementos de la matriz  $[a]$  de coeficientes técnicos de la producción nacional se definen con

$$a_{jh} = \frac{j^h P_o}{h^P o} ;$$

esto es  $a_{jh}$  es el volumen de insumos que el sector  $h$  demandaría del sector  $j$  para producir  $h^P o = 1$ .

En el caso del esquema de relaciones interindustriales presentado en la Tabla I, se tiene

$$[a] = \begin{bmatrix} 0,035.782 & 0,141.046 & 0,000 \\ 0,045.808 & 0,194.284 & 0,039.608 \\ 0,258.946 & 0,072.828 & 0,000 \end{bmatrix}$$

Utilizando la definición de los  $a_{jh}$ , y suponiendo que son constantes para  $i = 1, \dots, 1$ , la ecuación (43) puede escribirse.

$$j^P i = j^E i + \sum_{h=1}^n a_{jh} h^P i$$

de donde se obtiene,

$$j^E i = (1 - a_{jj}) j^P - \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n a_{jh} h^P$$

y pasando a la notación de vectores y matrices

$$[E_i] = \left[ [1] - [a] \right] [P_i] \quad (45)$$

La ecuación (45) es una expresión abreviada de un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas  $j^P i$ . El significado de este sistema es que dados los valores que constituyen  $[E_i]$ , se pueden conocer la de  $[P_i]$ , suponiendo constantes a los de  $[a]$ .

Con el valor numérico de  $[a]$  antes presentado se obtiene:

$$[1] - [a] = \begin{bmatrix} 0,964.218 & - 0,141.046 & 0,000 \\ -0,045.808 & 0,805.716 & -0,039.608 \\ -0,258.946 & - 0,072.828 & 1,000 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se denotará por  $[A]$

El sistema (45) de ecuaciones, dados los valores de  $[E_i]$  puede resolverse de varias maneras, una de ellas es la inversión de la matriz  $[A]$ . Este proceso matemático se halla descrito entre otros textos en "Mathematical Economics" por R.G.D. Allen publicado por Mac Millan 1956.

La matriz inversa en el ejemplo que se estudia es.

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,047.814 & 0,184.086 & 0,007.291 \\ 0,073.172 & 1,258.447 & 0,049.844 \\ 0,276.656 & 0,139.318 & 1,005.518 \end{bmatrix}$$

Utilizando la matriz  $[A]^{-1}$  el sistema (45) puede escribirse

$$[P_i] = [A]^{-1} [E_i]'$$

Los elementos de la matriz  $[B]$  de coeficientes técnicos de importación se definen con.

$$B_{jh} = \frac{j^h Z_o}{h^P o} ;$$

esto es  $B_{jh}$  es el volumen de productos del sector  $j$  que el sector  $h$  importaría para producir  $h^P o = 1$ . Luego, en el ejemplo en estudio

$$[B] = \begin{bmatrix} 0,000.691 & 0,055.773 & 0,000 \\ 0,005.359 & 0,050.242 & 0,000 \\ 0,003.457 & 0,037.336 & 0,000 \end{bmatrix}$$

Utilizando la definición de las  $B_{jh}$  y suponiendo que son constantes para  $i = 1, \dots, l$ , la ecuación (44) puede escribirse

$$j^Z i = \sum_{h=1}^n B_{jh} h^P i ;$$

o empleando la notación de matrices

$$[Z_i] = [B] [P_i]' \quad (46)$$

La relación (46) permite obtener los valores de  $[Z_i]$  dados los de  $[P_i]$ .

## 2.- Datos sobre consumo y elasticidades.

Los datos necesarios de consumo total, nacional e importado,

aparecen en la Tabla 4.

Se calculó la elasticidad  $e_T^c$  del  $C_T$  respecto a  $Y$ , que se utiliza en la ecuación (10), ajustando por mínimos cuadrados la fn.

$$C_T = AY^{e_T^c}$$

a las series de valores que aparecen en el cuadro II - 2 del "Informe".

Se obtuvo  $e_T^c = 1,173$ .

De una manera arbitraria se resolvió usar las siguientes elasticidades:

$$e_I^c = \frac{e_T^c}{I} = 0,619$$

$$1e_N = 0,71$$

$$2e_N = 1,32$$

$$3e_N = 0,997$$

### 3.- Datos sobre Exportaciones.

Los datos referentes a exportaciones totales y por sectores aparecen en la Tabla 4. El Cuadro II-2 del Informe indica que las exportaciones entre 1950 y 1957 crecieron al 2,83 % anual. Para el crecimiento futuro se resolvió usar una tasa del 3%.

### 4.- Datos sobre Producto Nacional Bruto.

También aparecen en la tabla 4; en el Cuadro II-2 del Informe se obtiene que el crecimiento del Producto Nacional Bruto entre 1950 y 1957 se hizo a una tasa del 6,11% anual. Como una meta para el caso de planificación se adoptó un crecimiento a una tasa del 7% anual.

### 5.- Capital por sectores y relaciones que forman el vector $s_i$

Tabla 5

CAPITAL EN 1954 Y RELACIONES  $\frac{j^{K-1}}{j^P o}$

j	$j^{K-1}$ (millones S/)	$j^P o$ (millones S/)	$\frac{j^{K-1}}{j^P o}$
1	8.344,2	5.785	1,442
2	4.230,5	4.339	0,975
3	15.610,7	5.504	2,836
	28.185,4	15.628	1,804

Los valores de  $j^{K-1}$  fueron estimados usando los datos de los cuadros II-3 y II-9 del Informe y de la Tabla 4.

6.- Inversiones netas y brutas; depreciación y parámetro  $e_T^I$ .

Los valores de las inversiones brutas, nacionales e importadas aparecen en la Tabla 4.

Se adoptó:

$$r_i = 0,03$$

$$e_T^I = 1,895$$

En la Tabla 6 se presentan los valores iniciales para  $i = 0$ .

B) Proyección cuando no se supone planificación.

La numeración de los pasos a continuación corresponde a la que aparece en la sección VII a).

1) Aplicando la fórmula:

$$j^{DC}_{N_i} = (j^{e_N}) (j^{e_{N_{i-1}}}) \frac{DC_{N_i}}{C_{N_i}}$$

y con el supuesto de que  $DC_{N_i} = 1$  se obtiene:

$$\begin{bmatrix} DC_{N_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,256 \\ 0,430 \\ 0,312 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$[A]^{-1} [DC_{N_1}]' = \begin{bmatrix} 0,350 \\ 0,575 \\ 0,445 \end{bmatrix}$$

y por último

$$m_1 = [s_1] \begin{bmatrix} 0,350 \\ 0,575 \\ 0,445 \end{bmatrix} = 0,505 + 0,561 + 1,260 = 2,34$$

Por otra parte:

$$w_1 = (1) [B] \begin{bmatrix} 0,350 \\ 0,575 \\ 0,445 \end{bmatrix} = 0,086$$

2) Por no disponer de todos los datos necesarios para la aplicación del modelo se resolvió considerar que el incremento de las exportaciones se haría de manera que se conservaría fija la proporción existente entre las exportaciones por sectores y el total en el año cero; luego si  $DX_1 = 1$

$$[DX_1]' = \begin{bmatrix} 0,865 \\ 0,031 \\ 0,104 \end{bmatrix}$$

Con operaciones similares a las utilizadas en el paso 1), y aplicando las ecuaciones (25) y (29) se obtiene:

$$c_1 = 2,41$$

$$k_1 = 0,024$$

3) Para calcular  $[DI_{N_i}^I]$  se aplica (42) con las restricciones

establecidas al tratar de dicha fórmula.

Siendo:

$$a_1 = 0,505 + 0,561 + 1,260$$

$$c_1 = 1,317 + 0,104 + 0,987$$

el significado de la fórmula (42) y sus restricciones, es que los componentes de  $[DI_{N_1}^I]$  deben ser proporcionales a:

$$1,822 \quad 0,665 \quad 2,247 \quad ;$$

de donde:

$$\begin{bmatrix} DI_{N_1}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,385 \\ 0,140 \\ 0,475 \end{bmatrix}$$

Aplicando las ecuaciones (23) y (27) se obtiene:

$$b_1 = 2,560$$

$$h_1 = 0,037$$

Los valores de  $b_1^1$  y  $h_1^1$  se pueden suponer iguales a  $b_1$  y  $h_1$ .

4) Quedó ya indicado que bajo el supuesto de que

$$I_{T_1}^A = 0, \text{ se tiene}$$

$$I_{N_1}^A = I_{M_1}^A = DI_{T_1}^A = DI_{N_1}^A = 0.$$

5) Aplicando las ecuaciones (16) y (19) se obtiene:

$$DI_{N_1}^I = 53,76$$

$$I_{N_1}^I = 1.048,76$$

$$DC_{N_1} = 287,72$$

$$C_{N_1} = 8.890,72$$

$$I_{N_1}^B = 1.048,76$$

6) Con las ecuaciones (18) y (20) se obtiene:

$$DY_1 = 375,39$$

$$Y_1 = 11.367,39$$

$$DZ_1 = 28,22$$

$$Z_1 = 705,17$$

Los valores restantes aparecen en la Tabla 6.

c) Proyección cuando se supone planificación.

No hace falta ninguna observación adicional a las ya presentadas. Los resultados aparecen en la Tabla 6.

Tabla No. 6

VALORES DE LAS VARIABLES PARA  $i = 0, 1$ .  
(Valores en millones de sucres)

Variables	$i = 0$	$i = 1$	
		(Sin Planificación)	(Con Planificación)
$Y_i$	10.992	11.367.39	11.367.20
$C_{T_i}$	9.167	9.534.20	9.534.20
$C_{N_i}$	8.603	8.890.72	8.890.72
$C_{M_i}$	564	643.48	643.48
$I_{T_i}^B$	1.806	1.897.25	2.849.80
$I_{N_i}^B$	995	1.048.76	1.048.76
$I_{M_i}^B$	811	848.49	1.801.04
$I_{T_i}^I$	1.806	1.897.25	1.897.25
$I_{N_i}^I$	995	1.048.76	523.65
$I_{M_i}^I$	811	848.49	1.373.62
$I_{T_i}^N$	960.44	1.022.57	1.975.42
$I_{T_i}^{NI}$	960.44	1.022.57	1.022.32
$I_{T_i}^A$	0	0	953.07
$I_{N_i}^A$	0	0	525.11
$I_{M_i}^A$	0	0	427.96
$d_i$	845.56	874.38	874.38
$K_{i-1}$	28.185.4	29.145.84	29.145.84
$M_i$	2.051.80	2.197.14	3.149.76
$Z_i$	676.80	705.17	705.24
$L_i$	19.30	63.91	1.016.56
$X_i$	2.071.10	2.133.23	2.133.23

BIBLIOGRAFIA

- Cao-Pinna Vera: "El método de análisis de las Interdependencias Estructurales".- Anales de Economía.- Ftad. de Ciencias Políticas y Económicas.- Madrid.- Vol. XVI, Num. 62; Sep 1956
- Cibotti R. y Ochsenius V.: "Un modelo econométrico de Programación del Desarrollo Económico".  
El Trimestre Económico Fondo de Cultura Económica, México Vol. XXII, Núm. 85-88: 1955.
- Chenery H. B.: "Development policies and programmes".- Economic Bulletin for Latin America: United Nations: Santiago Vol. III, No. 1, March 1958.
- Ochsenius V, Vuskovic P. "El Modelo de Insumo Producto".  
Boletín Económico de América Latina: Naciones Unidas' Santiago Vol. I No. 2. Sep. 1956.
- Pradetti A. "Los modelos econométricos de la Cowles Commission".- Revista de Economía Política: Instituto de Estudios Políticos.- Madrid: Vol. VII. No. 19.- Enero-Abril 1956.
- Tinbergen J. "Economic Policy: Principles and Design".- North Holl and Publishing Co.- Amsterdam.- 1956.

## I N D I C E

### UN MODELO DEL CRECIMIENTO ECONOMICO

	<u>Páginas</u>
I.- Conceptos Básicos	5
II.- Modelo Económico	7
III.- Planificación y Política Económica	9
IV.- Un Modelo de Crecimiento Económico	13
V.- Discusión de los Aspectos Matemáticos del Modelo	23
VI.- Discusión de los Aspectos Económicos del Modelo	27
a) Comparación de Ecuaciones y Variables según se suponga o no, planificación	27
b) Estudio de las Ecuaciones que aparecen en el Modelo	29
VII.- Utilización del Modelo	33
a) Método de cálculo cuando no se supone planifica- ción.	37
b) Método de cálculo, cuando se supone Planificación	39
VIII.- Ejemplo Numérico	41
A) Datos a usarse	41
B) Proyección cuando no se supone planificación	45
C) Proyección cuando se supone planificación	48
Bibliografía	51
. . .	

La Junta Nacional de Planificación y Coordinación Económica permite cualesquiera reproducciones o mención del material que contienen sus publicaciones. Únicamente encarece se cite la fuente de referencia y, de ser posible, se le envíe un ejemplar de la reproducción que se hiciera.

Distribución Gratuita.

#### CANJES Y ENVIOS :

Solicitarlos a: Junta Nacional De Planificación Y Coordinación Económica. - Sección Informaciones. - Quito, Ecuador.

ADS/.