Banco Central del Ecuador
Cuestiones económicas n. 35
Quito, septiembre 1998

La hipótesis del ciclo de vida, la acumulación de capital y la deuda pública

Simón Cueva*

Introducción

Este trabajo presenta algunas implicaciones a nivel agregado del comportamiento individual de los agentes económicos bajo la teoría del ciclo de vida. Después de presentar rápidamente dicha teoría, se considera la dinámica de la acumulación del capital que esta conlleva, para luego desarrollar dos temas específicos: la eficacia de los equilibrios de mercado bajo esta dinámica, así como la influencia de la deuda pública sobre el sendero de largo plazo de la economía y sus efectos redistributivos a más corto plazo.

El marco apropiado para este estudio se deriva de los modelos de generaciones traslapadas, en los que distintas generaciones de individuos coexisten. En estos modelos, el comportamiento del consumo y el ahorro se derivan siempre de la maximización de la utilidad intertemporal de cada individuo y se asume que los agentes realizan anticipaciones perfectas. Se hace referencia básicamente a tres modelos:

---

* Economista de la Dirección General de Estudios del Banco Central del Ecuador.

1. Pese a su simplicidad, el modelo en dos períodos de Diamond (1965) permite identificar los principales determinantes de la evolución del *stock* de capital. Se pueden así enfocar varios aspectos: la existencia de un sendero de crecimiento de la economía a tasa constante, la convergencia del sistema hacia dicho equilibrio y la posibilidad de que este equilibrio sea ineficiente desde un punto de vista dinámico. Este modelo permite, además, determinar la influencia de la deuda pública sobre la evolución de la economía a nivel agregado; pudiendo distinguirse el impacto de la deuda externa de aquel de la deuda interna.

2. Cuando se incluye un mayor número de generaciones de individuos, la agregación de la función de consumo se torna compleja ya que las distintas generaciones coexistentes tienen un tiempo de vida finito, por lo que existe una heterogeneidad de los diversos agentes en cuanto a sus niveles de riqueza como a sus propensiones a consumir. El modelo propuesto por Blanchard (1985) hace más manejable la agregación al incluir la hipótesis de esperanza de vida constante a lo largo de la vida de un individuo. Así, este modelo es conceptualmente cercano a la hipótesis de ingreso permanente de Friedman (1957), que corresponde al caso particular en que el horizonte de vida de los agentes se vuelve infinito. Esta formalización permite discutir en mayor detalle algunas de las dudas generadas por el modelo de Diamond, sobre todo en cuanto a la importancia del carácter finito de la vida de los agentes.

3. El modelo de Auerbach y Kolikoff (1987) utiliza una resolución numérica para tratar la complejidad de la agregación, en un caso bastante general que incluye a 55 generaciones de individuos coexistiendo. Los resultados de las simulaciones permiten analizar de manera bastante fina el comportamiento de los agentes y, por ende, discutir las intuiciones teóricas. Este modelo es especialmente útil en el estudio del camino de transición que conduce hacia el sendero de equilibrio estacionario.

1. La teoría del ciclo de vida

En la teoría económica clásica, el ahorro se percibe como la oferta de capital, factor esencial que determina la productividad del trabajo y su evolución. Es por ello que el estudio de los determinantes del ahorro ha tenido un espacio preponderante en la teoría económica. El ahorro ha sido considerado tradicionalmente como un acto socialmente útil que genera inversión y por ende crecimiento.

La teoría keynesiana moderó esta visión, ya que la "ley psicológica fundamental" de la Teoría General de Keynes, considera al ahorro más bien como un residuo frente al consumo de los hogares. Un incremento de la tasa de ahorro refleja entonces una disminución simultánea del consumo sin que necesariamente la inversión aumente en igual magnitud, lo que se explica por diferentes razones (rigideces salariales, preferencia por liquidez, "espíritus animales" de los inversionistas...). La demanda global, único elemento que permitiría una reactivación económica de acuerdo a esta teoría, se reduce cuando se incrementa la inversión, por lo que esta última es vista con relativa suspicacia. Bajo esta perspectiva, el ahorro sería un bien superior (de lujo), cuyo consumo aumenta con el ingreso, lo cual explicaría las diferencias internacionales entre las tasas de ahorro.

Esta visión carece, sin embargo, de fundamentos racionales del comportamiento de ahorro de los hogares y no toma en cuenta las restricciones financieras de los agentes. Varios estudios empíricos de fines de los años 40, cuestionan las conclusiones keynesianas en cuanto al ahorro. Kuznets (1946) constata tasas de ahorro constantes frente a un fuerte incremento del ingreso per cápita observadas desde el siglo XIX; Brady y Friedman (1947) y Duesenberry y Modigliani (1949) notan que el ingreso relativo de los hogares con respecto al ingreso promedio (no el ingreso en términos absolutos) explica bastante mejor la tasa de ahorro.

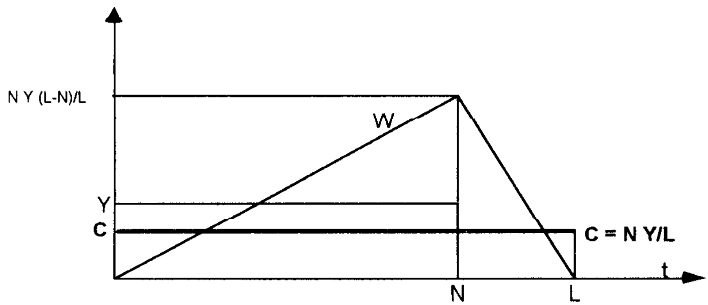
Los trabajos de Modiglinai y Brumberg (1954) sobre la hipótesis del ciclo de vida y de Friedman (1957) sobre el ingreso permanente, constituyen el punto de partida de desarrollos importantes sobre los fundamentos microeconómicos del comportamiento del ahorro de los hogares. Estos dos modelos, bastante similares en sus rasgos generales, se diferencian por el horizonte de vida de los individuos, finito en la teoría del ciclo de vida e infinito en el caso del ingreso permanente[1].

[1] En este análisis, la consideración de un horizonte de vida infinito no tiene por objetivo representar a eventuales individuos inmortales, sino que corresponde a un horizonte de planeación infinito de los agentes económicos, que incluyen en su función de utilidad el deseo de legar una herencia a sus descendientes o la incertidumbre sobre su esperanza de vida.

La teoría del ciclo de vida parte fundamentalmente de la maximización de la utilidad intertemporal de cada individuo, con una restricción: su consumo actual no puede nunca ser superior al valor presente de sus ingresos. El ahorro es entonces un medio para transferir recursos entre las distintas etapas de su vida. Los niveles actuales de consumo y de ahorro dependen del conjunto de ingresos generados a lo largo de la existencia del individuo y no del ingreso corriente, como supone la teoría keynesiana.

Se puede analizar un caso muy esquematizado del comportamiento del ciclo de vida[2]: el tiempo de vida de los agentes es finito (L), no existen herencias y los individuos tienen un ingreso (Y) constante durante su vida activa (es decir, cuando $0 < t < N$) y nulo durante su jubilación ($N < t < L$). La función de utilidad de cada individuo es tal que busca obtener un nivel de consumo constante a lo largo de su vida, suponiendo nula la tasa de interés. El consumo de un agente (C) tiende entonces a "suavizarse" a lo largo de su vida, ya que el ahorro acumulado durante su vida activa compensa exactamente el desahorro en el que incurre durante su jubilación. La riqueza del individuo (W) crece a tasa constante durante su vida activa para reducirse, también a tasa constante, a lo largo de su jubilación.

Gráfico No. 1
Riqueza (W), ingreso (Y) y consumo (C) a lo largo del ciclo de vida



---

2 Para una presentación sintética, ver Modigliani (1986).

Este modelo extremadamente simple permite explicar que la tasa de ahorro de un individuo es independiente de su ingreso corriente, pero depende del tiempo que dura su jubilación y, por ende, de la edad (N) a la cual esta última empieza. El carácter finito del horizonte de planeación es básico. Igualmente, el monto total de la riqueza de un agente (W) puede ser importante, aunque no existan herencias[3].

Este tipo de comportamiento intertemporal de los agentes se formaliza, de manera más o menos elaborada, en los modelos que se presentan más adelante. La evolución de los distintos agregados se torna más compleja a medida que se consideran hipótesis menos triviales. Por ello, se presentan únicamente los puntos esenciales que permiten aclarar el funcionamiento de este tipo de modelos.

2. La dinámica de acumulación del capital

A continuación se presentan los principales resultados que se derivan de los modelos sobre la evolución del *stock* de capital en la economía. El modelo de Diamond (1956) es bastante rico pese a su simplicidad. Es útil describirlo de manera precisa, puesto que su forma de resolución se aplica a modelos más complejos como el de Auerbach y Kotlikoff (1987). Se puede distinguir el caso de la "regla de oro", de aquel en que hay otros equilibrios de mercado. Esto permitirá más adelante discutir sobre la eficiencia de los distintos equilibrios y sobre las razones que pueden explicar eventuales ineficiencias.

2.1 El modelo de Diamond

Se considera un modelo en el que los individuos viven dos períodos: trabajan durante el primero y se jubilan en el segundo, cuando consumen todo el ahorro que acumularon anteriormente, sin que existan herencias.

---

3 Esta observación condujo a un debate teórico sobre la importancia relativa de los distintos determinantes del ahorro: herencia, comportamiento de ciclo de vida, ahorro de precaución, incertidumbre sobre el horizonte de vida. Ver Modigliani y Brumberg (1954) y Modigliani (1988).

Los agentes jóvenes en el período t maximizan una función de *utilidad* $U(c^1{}_t, c^2{}_{t+1})$ que depende del consumo en ambos períodos. Si r_t y w_t representan la tasa de interés y el ingreso salarial durante el período t, los agentes ahorrarán s_t en el primer período, y consumirán durante su jubilación los ingresos provenientes del ahorro:

$$(1) \qquad c_t^1 = w_t - s_t \qquad y \qquad c_{t+1}^2 = \left(1 + r_{t+1}\right)s_t$$

Si L_t es el número de personas que trabajan en el período t, el consumo total en dicho período es la suma de aquel de los "jóvenes" y del de los "viejos":

$$(2) \qquad C_t = c_t^1 \; L_t + c_t^2 \; L_{t-1}$$

En base al *stock* de capital disponible K_t (determinado en el período t-1) y a la fuerza laboral L_t, se produce[4] un único bien, es decir $Y_t = F\,(K_t, L_t)$. Si $k_t = K_t/L_t$ es la relación capital-trabajo y $y_t = Y_t/L_t$ la productividad promedio del trabajo, se puede escribir de manera equivalente $y_t = f\,(k_t) = F\,(k_t, 1)$ como el producto *per capita*. Bajo competencia perfecta, el comportamiento de optimización de las empresas, implica igualar las productividades marginales del trabajo y del capital con el salario y la tasa de interés, respectivamente. Así, se obtienen las ecuaciones que caracterizan la frontera de las posibilidades de producción:

$$(3) \qquad f'\left(k_t\right) = r_t \qquad y \qquad f\left(k_t\right) - k_t f'\left(k_t\right) = w_t$$

En cuanto al equilibrio del mercado de bienes, la producción permite incrementar el *stock* de capital del siguiente período y satisfacer el consumo del período actual:

$$(4) \qquad Y_t = K_{t+1} - K_t + C_t$$

---

4 Suponiendo rendimientos constantes a escala y rendimientos decrecientes frente a cada uno de sus factores.

2.2 El equilibrio estacionario de la "regla de oro"

Si n es la tasa de crecimiento de la población, el equilibrio estacionario que corresponde a la "regla de oro" es óptimo entre todos aquellos
para los cuales la relación capital-trabajo es constante. Entonces, $K_{t+1} = (1+n).K_t$, y:

(5) $$Y_t - n\,K_t = C_t = c_t^1\,L_t + c_t^2\,\frac{L_t}{1+n}$$

Se supone además que todas las generaciones tienen un comportamiento idéntico: los valores de k, y, c^1 y c^2 son constantes e independientes del tiempo. La regla de oro corresponde a la situación en que se maximiza la función de utilidad $U(c^1, c^2)$, bajo la restricción que se deduce de (5):

(6) $$c^1 + \frac{c^2}{1+n} = y - nk$$

La resolución de este problema de optimización se puede hacer en dos etapas. En primer lugar, se selecciona el nivel óptimo de la relación capital-trabajo k, obteniéndose la condición de igualdad entre la productividad marginal del capital y la tasa de crecimiento de la población(y, por ende, la tasa de interés si la empresas se encuentran en situación de competencia perfecta):

(7) $$f'(k) = n$$

En segundo lugar, cada agente escoge la repartición de su consumo entre los dos períodos de su vida, lo que implica:

(8) $$\frac{U}{c^1} = (1+n)\frac{U}{c^2}$$

Se supone que la función de utilidad de los agentes es separable de manera aditiva entre los dos períodos y que los individuos enfrentan la restricción intertemporal que se obtiene al eliminar el ahorro[5]. Analizando siempre el caso de una tasa de crecimiento constante, los agentes escogerán el perfil de consumo señalado en la ecuación (8), siempre y cuando la tasa de interés sea igual a la tasa de crecimiento de la población ($r = n$).

Las dos condiciones obtenidas ($r = f'(k) = n$) generan las condiciones de optimalidad del modelo, cuando la relación capital-trabajo es independiente del tiempo. A continuación se examina el perfil de la acumulación del capital en el caso general, buscando precisar las diferencias ente los distintos equilibrios estacionarios posibles y aquel de la "regla de oro".

2.3 La acumulación del capital

Cuando la relación capital-trabajo varía con el tiempo, ya no se busca el equilibrio óptimo (como aquel que podría interesar a un planificador omnisciente), sino los diferentes equilibrios de mercado posibles. Para hacerlo, se requiere analizar el comportamiento de optimización dinámica de las empresas y de los hogares, con el fin de deducir la dinámica de acumulación del capital.

Las ecuaciones (3), que definen la frontera de posibilidades de producción de las empresas, conducen a una relación entre w_t y r_t (por eliminación de k_t), y permiten precisar el sentido en qué varía dicha relación:

$$(9) \qquad w_t = \Phi(r_t) \qquad con \qquad \Phi'(r_t) = -k_t \ \ (< 0)$$

Los hogares maximizan su utilidad, tomando en cuenta su restricción presupuestaria intertemporal que se deduce de (1):

$$(10) \qquad c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{1 + r_{t+1}} = w_t$$

---

[5] De esta manera, las ecuaciones (1) conducen a la ecuación (10).

Esta optimización permite deducir el nivel de consumo, y por ende del ahorro, de los hogares en función de sus ingresos salariales y de la tasa de interés del período siguiente, $s_t\ (w_t, r_{t+1})$. Si el bien de consumo es normal, el ahorro crece con el ingreso. La dependencia en relación con la tasa de interés es ambigua, ya que aparecen los efectos tradicionales de substitución y de ingreso.

El equilibrio de los bienes y servicios puede transcribirse desde una perspectiva ahorro-inversión. En este modelo, no se toma en cuenta la amortización del capital. En competencia perfecta, las utilidades de las empresas son nulas. Por ende, el ahorro de los hogares en el período t (S_t, ahorro de los jóvenes, ya que durante su jubilación los individuos consumen todos sus ahorros), financia la acumulación de capital, incluyendo el capital acumulado en el período t (K_t), así como la inversión del período (K_{t+1} - K_t):

(11) $$S_t = s_t\ L_t = K_{t+1}$$

De lo que se deduce:

(12) $$r_{t+1} = f'\left(\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}\right) = f'\left(\frac{s(w_t, r_{t+1})}{1+n}\right)$$

Esta ecuación se puede aún interpretar como una relación implícita entre el ingreso salarial de un período y la tasa de interés del período siguiente:

(13) $$r_{t+1} = \Psi(w_t)$$

Contrariamente a la función ϕ, el sentido de variación de ψ no es obvio, ya que su derivada depende de las pendientes relativas de dos curvas: la de demanda de ahorro ($r_{t+1} = f'(s/(1+n))$) y la de oferta de ahorro ($s = s(w_t, r_{t+1})$) en función de la tasa de interés. Esta última relación depende además, de la importancia relativa de los efectos de substitución intertemporal y de ingreso.

Se puede notar que las ecuaciones (9) y (13) describen la dinámica de la tasa de interés:

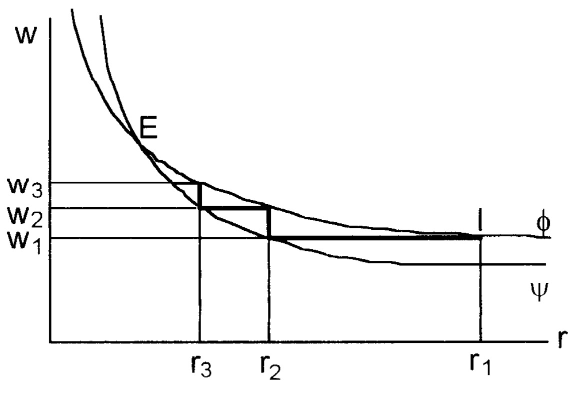
$$r_{t+1} = \Psi(\Phi(r_t)) \tag{14}$$

El comportamiento agregado de acumulación del capital se deduce de esta relación, ya que existe una relación entre el coeficiente capital-trabajo y la tasa de interés: más específicamente $r_t = f'(k_t)$, con una función f' decreciente. En base a una situación inicial en la que se conocen los valores del salario y de la tasa de interés, se puede deducir la tasa de interés del período siguiente (función ψ), y por ende el nivel salarial correspondiente (función ϕ).

Gráficamente, se puede observar la evolución de la economía, desde de la situación inicial (punto *I*) hacia un equilibrio estacionario (punto *E*). A lo largo de dicha trayectoria, la tasa de interés disminuye, mientras que el salario y la relación capital-trabajo aumentan:

Gráfico 2

Evolución de la economía hacia el equilibrio estacionario



El gráfico, tal como ha sido dibujado, corresponde a la situación en que existe un equilibrio estacionario único y estable (punto *E*). Para asegurar su estabilidad debe existir la siguiente condición entre las derivadas de las funciones ϕ y ψ alrededor de dicho equilibrio:

$$0<\frac{dr_{t+1}}{dr_t}=\Psi'.\Phi'<1 \qquad (15)$$

Esta condición de estabilidad, será útil más adelante para determinar la trayectoria de la economía cuando se introduce la deuda pública. Nótese que la existencia del equilibrio no es trivial y que su estabilidad, en general, no está asegurada[6]. Cuando existe un equilibrio estable, cabe preguntarse si dicho equilibrio de mercado difiere de aquel de la "regla de oro" y si, además, es eficiente desde un punto de vista dinámico.

3. Por qué son ineficientes los equilibrios estacionarios?

3.1 Ineficiencia de los equilibrios estacionarios

Ya que los individuos establecen su comportamiento de acumulación de capital en base a la maximización de sus funciones de utilidad, el equilibrio estacionario que se obtiene podría ser óptimo en el sentido de Pareto. Por ello, no debería haber sub o sobreacumulación de capital. Sin embargo, esta intuición es falsa, como en el caso que se presenta a continuación.

El sendero de crecimiento a tasa constante puede corresponder *a priori* a una tasa de interés superior o inferior al nivel determinado por la "regla de oro" (y, por ende, igual a la tasa de crecimiento poblacional, n). Sin embargo, para una tasa de interés inferior a n y, por lo tanto, para una relacion capital-trabajo mayor al nivel de la "regla de oro", los equilibrios que se obtienen no son Pareto-eficientes, tal como lo demostraron Koopmans y Phelps (1965).

---

[6] *A priori* podrían existir varios, o ningún, equilibrio estacionario. Más aún, la convergencia hasta el equilibrio no está garantizada. En un modelo en tiempo continuo, incluyendo en la función de utilidad una preferencia de los agentes por el presente, Cass y Yaari (1967) muestran que es posible encontrar varios senderos de equilibrio a tasa de crecimiento constante, sin que se pueda demostrar que la convergencia hacia dichos equilibrios esté garantizada.

Retomando Blanchard y Fischer (1987), se puede explicar intuitivamente la no optimalidad de estos equilibrios particulares. Se considera un sendero de equilibrio de este tipo, con una relación capital-trabajo (k^*) tal que se tenga $f'(k^*) < n$. Como k^* es constante, el resultado es equivalente al de la ecuación (5) en el caso de la "regla de oro". A partir del equilibrio estacionario, una variación de la relación capital-trabajo inducirá una variación de la relación (C^*/L^*):

$$(16) \qquad \frac{d\left(C^*/L^*\right)}{dk^*} = f'\left(k^*\right) - n \qquad (< 0)$$

Por ende, una reducción de k^* permitiría incrementar el consumo del conjunto de los agentes. A partir del período t, antes del cual la economía se encontraba en un equilibrio estacionario definido por k^*, se decide reducir la tasa de acumulación del capital, de manera que la relación capital-trabajo se reduzca permanentemente en un monto infinitesimal dk. Las ecuaciones (5) y (16) describen la evolución del consumo de los hogares a partir del período t, de lo que se deduce que:

$$(17) \qquad d\left(C_t/L_t\right) = -\left(1+n\right)dk \qquad (> 0)$$

$$(18) \qquad d\left(C_{t+i}/L_{t+i}\right) = \left[f'\left(k^*\right) - n\right]dk \qquad (> 0) \quad \textit{para todo } i > 0$$

Por lo tanto, este incremento en el consumo podría repartirse entre los distintos agentes, incrementando la utilidad de todos los individuos. Consecuentemente, el equilibrio no es óptimo en el sentido de Pareto.

Como se explica este resultado? En un sendero de equilibrio para el cual $f'(k^*) < n$, la productividad del capital es menor a los recursos estrictamente necesarios para mantener idéntica la relación capital-trabajo para las nuevas generaciones, que crecen a una tasa n. Cuando k^* disminuye, esta restricción es menos estricta, ya que ambos lados de la desigualdad se acercan: entonces se puede incrementar el consumo *per capita*, que aumentará en los períodos siguientes. La economía, por tanto, se dirigirá hacia un nuevo sendero de equilibrio estacionario, más cercano al sendero de la regla de oro, para el que la productividad del capital y la tasa de crecimiento de la población son iguales.

Equilibrios ineficientes desde un punto de vista dinámico como aquellos presentados pueden obtenerse en los modelos de generaciones traslapadas, con sobreacumulación del capital para la economía en su conjunto.

Se puede buscar el tipo de medidas intervencionistas que pueden reducir, e incluso eliminar, esta ineficiencia de mercado. En esta óptica, Diamond propone la venta de títulos del Estado y Cass y Yaari sugieren la creación de moneda que no implique pago de interés. En ambos casos, la idea central es la de canalizar el ahorro de los individuos hacia otra dirección que la de la acumulación del capital. Por otro lado, es interesante comprender las razones que dan lugar a esta ineficiencia, para lo cual a continuación se presenta una breve presentación del modelo de Blanchard (1985).

3.2 El modelo de Blanchard

Se trata de un modelo en tiempo continuo sin crecimiento demográfico. Los agentes tienen una probabilidad instantánea y constante *(p)* de morir a lo largo de su vida. Esta hipótesis bastante fuerte simplifica en gran medida el problema de la agregación de la función de consumo. Por otro lado, abre la discusión sobre el impacto del horizonte de vida y las consecuencia de un tiempo de vida finito de los individuos, ya que su esperanza de vida puede variar aquí entre cero y el infinito.

Se supone además que los individuos no buscan explícitamente dejar herencias, aunque estas podrían existir en la práctica como consecuencia de la incertidumbre sobre la esperanza de vida de los agentes. Para eliminar este problema, se introduce un mecanismo de seguro de vida. Las compañías de seguros se encuentran en situación de competencia perfecta con libre entrada (y por ende, utilidades nulas). En el período t, un agente cuya riqueza (que puede ser negativa) es $w(t)$, recibe de la compañía de seguros un monto $pw(t)$ y entregará a la compañía toda su riqueza el día de su muerte. Este sistema permite a los agentes terminar sus días con una riqueza nula, pese a la incertidumbre sobre su esperanza de vida.

Con respecto al modelo de Diamond, este modelo permite estudiar la influencia del carácter finito de la vida de los agentes, de una variación de la productividad del trabajo con la edad y de una modificación de la elasticidad de substitución de la función de utilidad.

Considerando primero una función de utilidad logarítmica, en la que los ingresos salariales son idénticos para todos los agentes (sin evolución de la productividad con la edad), en un período t, la utilidad instantánea de un individuo nacido en el período s es $U(s, t) = \log c(s, t)$. Si los individuos tienen una preferencia por el presente θ, maximizan una utilidad en el período t:

(19) $$E_t\left[\int_t \log c(s,v)\, e^{-\theta(v-t)}dv\right]$$

La única fuente de incertidumbre proviene de la posibilidad de morir. A la fecha t, la probabilidad para un agente de permanecer en vida en la fecha v sería igual a $\exp[-p.(v - t)]$. La utilidad de un individuo es nula en caso de muerte e igual a $U(s, t)$ en caso contrario. En la expresión anterior, al parámetro p, se añade θ como tasa de descuento sobre el futuro:

(20) $$\int_t \log c(s,v)\, e^{-(\theta+p).(v-t)}dv$$

En cuanto a la restricción presupuestaria, los individuos reciben, en el período t, intereses sobre su riqueza acumulada $r(t).w(s, t)$, además del monto $p.w(s,t)$ que perciben de la compañía de seguros si permanecen en vida. Tienen también un ingreso salarial $y(s, t)$ y un consumo $c(s, t)$. En resumen, el incremento de su riqueza en el período t es:

(21) $$\frac{dw(s,t)}{dt} = \left[r(t) + p\right]w(s,t) + y(s,t) - c(s,t)$$

Hay que agregar una condición de transversalidad para evitar situaciones "patológicas" en las que los individuos se endeudarían infinitamente, protegiéndose gracias al sistema de seguro de vida. Para simplificar la exposición, nótese únicamente que esta condición puede ser integrada a la precedente[7]. La maximización de la utilidad de los agentes bajo estas restricciones conduce a una condición de primer orden que, junto con la condición (21), provee una expresión simple para el consumo:

$$c(s,t) = (p + \theta)\left[w(s,t) + h(s,t)\right] \tag{22}$$

El término $h(s, t)$ representa los ingresos salariales totales de un individuo, en los que se toma en cuenta la tasa de interés (variable con el tiempo) y el parámetro p, asociado al sistema de seguro de vida, para actualizar a valor presente:

$$h(s\ t) = \int_t y(s,v)\, e^{-\int_t^v [r(z)+p]dz}\, dv \tag{23}$$

La relación (22) dice que el consumo de un individuo es proporcional a su riqueza total, a la suma del valor presente de sus ingresos salariales y a los no salariales (intereses sobre su ahorro e ingresos del mecanismo de seguro de vida). Esta proporcionalidad se puede encontrar para funciones de utilidad más complejas, siempre y cuando sean homogéneas con respecto al consumo.

Para un agente, los resultados son similares a los de un modelo sin incertidumbre, con la diferencia que, en el cálculo del valor presente, el parámetro p se suma a la preferencia por el presente θ y a la tasa de interés. Con el fin de realizar la agregación para las variables $c(s, t)$, $w(s, t)$, $h(s, t)$ y $y(s, t)$, se escriben con la mayúscula respectiva las variables agregadas correspondientes.

Suponiendo que el tamaño de las generaciones es suficientemente importante como para que no sea influenciada por la incertidumbre en cuanto a la vida de los agentes, se normaliza a p el tamaño de cada generación que nace en una fecha determinada. La generación nacida en

---

[7] Para un análisis detallado de las condiciones de transversalidad del problema, ver Yaari (1965) y, en el caso de un horizonte de vida con incertidumbre, Blanchard y Fischer (1987).

una fecha s tendrá un tamaño $p.exp[-p.(t - s)]$ en el período t. Se puede entonces deducir, por medio de un cálculo rápido, que el número total de agentes que viven en una fecha dada es igual a la unidad. Para cada variable individual $x(s, t)$, la variable agregada correspondiente $X(t)$ estará dada por:

$$(24) \qquad X(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s,t)\, p\, e^{p(s-t)} ds$$

En base a la ecuación (22), se puede deducir una relación similar, pero a nivel agregado, entre el consumo y los dos componentes de la riqueza (salarial y no salarial):

$$(25) \qquad C(t) = (p + \theta)\left[H(t) + W(t)\right]$$

Diferenciando las relaciones agregadas con respecto a los dos componentes de la riqueza total, se obtiene su comportamiento dinámico. Aquí interviene la hipótesis de que los ingresos salariales son constantes a lo largo de la vida de los agentes. Además de la condición de transversalidad para el ingreso H, se obtienen dos relaciones:

$$(26) \qquad \dot{H}(t) = (r + p).H(t) - Y(t)$$

$$(27) \qquad \dot{W}(t) = r\, W(t) + Y(t) - C(t)$$

La tasa de acumulación $(r + p)$ para la variable H puede interpretarse intuitivamente como el valor presente del ingreso salarial agregado, a la tasa de descuento r, considera los ingresos salariales de aquellos individuos que permanecerán vivos en el futuro (de ahí el parámetro p).

En cambio, el ingreso no salarial agregado W se acumula con una tasa igual a la tasa de interés, al contrario del ingreso no salarial individual w, cuya tasa de acumulación es $(r + p)$, de acuerdo con la ecuación (21). Esto se explica porqué el monto $p.W$ sólo constituye una transferencia, a través del sistema de seguro de vida, entre los individuos que mueren y aquellos que siguen en vida. No constituye un incremento de la riqueza no salarial a nivel agregado.

Para completar el modelo, hay que detallar el mecanismo de formación de los sueldos y de las tasas de interés. Una primera solución consiste en considerar una economía abierta, en la que la tasa de interés se alinea sobre la internacional y el sueldo es exógeno. Se resuelve entonces un equilibrio parcial, con valores exógenos del sueldo y de la tasa de interés.

Una segunda opción, que se considera a continuación, es la especificación de una función de producción de manera que se determine la acumulación del capital, para igualar la tasa de interés y los salarios a las productividades marginales del capital y del trabajo. Se considera una función de producción con rendimientos de escala constantes $G(K,1)$, con un tamaño unitario de la población en todo momento. Para tomar en cuenta la depreciación del capital (a una tasa δ), se introduce una función de producción F "corregida" por la depreciación:

(28) $$F(K) = G(K,1) - \delta\ K$$

La tasa de interés es igual a la productividad marginal neta del capital $F'(K)$ y el salario es igual a la productividad marginal neta del trabajo, que puede expresarse únicamente en función del capital, tomando en cuenta la constancia de los rendimientos de escala.

3.3 El carácter finito del horizonte de vida

En base a las relaciones (25), (26) y (27), se deduce aquella que describe el comportamiento dinámico del consumo agregado:

(29) $$\dot{C}(t) = (r - \theta)\, C(t) - p\,(p + \theta).W(t)$$

Por otra parte, la condición de primer orden de la maximización bajo restricciones (presupuestaria y de transversalidad) de los hogares, permite deducir el consumo individual de los agentes:

(30) $$\frac{dc(s,t)}{dt} = (r - \theta)\, c(s,t)$$

Esta última relación es la que había llevado a la ecuación (22). Se encuentra, de esta manera, un resultado tradicional de la hipótesis del ciclo de vida: si la tasa de interés r es superior (inferior) a la tasa de preferencia por el presente θ, el consumo crece (decrece) con el tiempo.

Cuando el horizonte de vida de los agentes se vuelve infinito ($p = 0$), esto corresponde al marco general de la teoría del ingreso permanente. La evolución del consumo agregado es entonces idéntica a la del consumo individual. Un modelo de este tipo ha sido estimado por Hall (1978) en base a datos norteamericanos desde la posguerra. Los resultados tienden a confirmar una evolución en forma de paseo aleatorio (*random walk*) para el consumo.

Si el horizonte de vida de los agentes es finito ($p > 0$), la variación del consumo agregado depende también del nivel de riqueza no salarial acumulada por los individuos. Un modelo de este tipo, en el que el equivalente a un horizonte de vida finito se introduce por medio de restricciones de liquidez con racionamiento del crédito, ha sido estimado por Hayashi (1982), introduciendo además la incertidumbre sobre los ingresos futuros. Los resultados son mitigados en cuanto a la hipótesis del ciclo de vida, pero tienden a confirmar la existencia de incertidumbre, cuestionando las conclusiones de Hall.

Como ya se indicara, cuando $p > 0$, la diferencia observada entre las evoluciones del consumo individual y agregado se explica por distintas las tasas de rendimiento individual y social para los ingresos no salariales. En todo caso, esta diferencia provee una primera explicación al hecho de que el equilibrio difiera de aquel de la *"regla de oro"*.

Para saber si ello es una causa de ineficiencia, se debe resolver el modelo. El capital constituye la única riqueza no salarial. El monto global de capital K será igual a la riqueza no salarial agregada de la economía W. En base a las relaciones (27), (28) y (29) se puede obtener (omitiendo el índice temporal) las dos ecuaciones que resumen el comportamiento dinámico del sistema:

$$(31) \qquad \dot{C} = \left[F'(K) - \theta\right] C - p\,(p + \theta)\,K$$

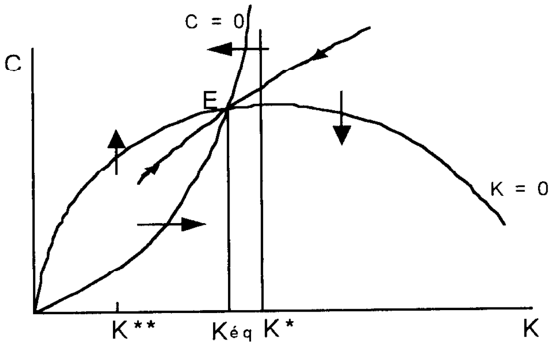
(32) $$K = F'(K) - C$$

Se debe notar que este modelo, como la mayoría de los modelos de crecimiento recientes, tiene una diferencia con el modelo de Diamond, ya que los agentes, al razonar en tiempo continuo, tienen una preferencia por el presente θ. Por esta razón, se obtiene una *"regla de oro modificada"*, en la cual la tasa de interés (productividad marginal del capital) es igual a la suma de la tasa de crecimiento poblacional (en este caso cero) y de la tasa de preferencia por el presente θ[8].

Los equilibrios estacionarios con relaciones capital-trabajo inferiores a la de esta "regla de oro modificada" son eficientes (óptimos en el sentido de Pareto), ya que la relación capital-trabajo es, *a fortiori*, inferior a aquella de "la regla de oro". En cambio, si el capital es relativamente más importante que en el caso de la regla de oro, los equilibrios pueden ser o no eficientes, según si el capital es mayor o menor que en el caso de la "regla de oro" definida en base al modelo de Diamond. El diagrama de fases presenta la dinámica del sistema:

Gráfico 3

Dinámica del sistema y configuración punto de silla



---

[8] Ver Cass (1965) y Britto (1973).

Además del caso obvio en que $C = K = 0$, sólo existe un equilibrio posible E, en el que hay una configuración de tipo punto de silla. Se ha trazado la trayectoria convergente hacia el punto de equilibrio. La curva $(\dot{C} = 0)$ tiene una asíntota vertical ($K = K^*$), con $F'(K^*) = \theta$, en el que el nivel de capital K^* corresponde al caso de la "regla de oro modificada". La única excepción corresponde a la situación en que el horizonte de vida de los agentes es infinito ($p = 0$), y en tal caso $(\dot{C} = 0)$ es la asíntota. La curva $(\dot{K} = 0)$ corresponde a la función de producción ($C = F(K)$).

Cuando el horizonte de vida es infinito, el punto de equilibrio estacionario es $K_{éq} = K^*$. Mientras el horizonte de vida sea finito, según la ecuación (31), se tiene $F'(K_{éq}) > \theta$, es decir que la tasa de interés de equilibrio es superior a la tasa de preferencia por el presente, por lo que $K_{éq} < K^*$. De hecho, mientras más corto sea el horizonte de vida *(1/p)*, más alejada estará la tasa de interés de θ y más bajo será el stock de capital de equilibrio.

Qué explica este comportamiento de los agentes ? En un equilibrio en el que $r = \theta$ (caso de la "regla de oro modificada"), la ecuación (30) dice que los individuos tienen un consumo constante a lo largo de su vida. Como sus ingresos salariales son constantes, van a consumir exactamente lo que reciben, sin acumulación ni desacumulación de capital. Esta situación es comprensible siempre y cuando el horizonte de vida sea finito. En caso contrario, si nacen sin ninguna riqueza, no puede existir un equilibrio, ya que el *stock* de capital agregado en la economía es nulo, mientras que su función es la de permitir una transferencia de riqueza entre generaciones traslapadas que coexisten durante cierto tiempo solamente. Para que la acumulación neta de capital sea positiva, los agentes buscarán ahorrar al comienzo de su vida y desacumular más tarde, con un perfil de consumo creciente con el tiempo. Para ello, la tasa de interés de equilibrio debe ser superior a la tasa de preferencia por el presente, por lo que es necesario alejarse de la "regla de oro modificada".

En todo caso, los equilibrios estacionarios que se obtienen son siempre eficientes desde un punto de vista dinámico: un cambio en el horizonte de vida modifica el equilibrio de largo plazo, pero no es un factor de ineficiencia. Por último, se puede demostrar que, si la función F es cóncava, se tiene $K_{éq} > K^{**}$, con $F'(K^{**}) = \theta + p$. En tal caso, la tasa de interés de equilibrio se ubica siempre al interior de dos valores extremos ($\theta < r < \theta + p$).

3.4 La variación de la elasticidad intertemporal de los hogares

Otra variante que puede analizarse en el modelo de Blanchard surge si se trata de remplazar la función de utilidad logarítmica por otra, isoelástica, con una elasticidad de substitución intertemporal constante $1/\sigma$. El resto del modelo permanece invariable, con ingresos salariales constantes a lo largo de la vida.

Sin pretender hacer una presentación exhaustiva, se puede observar que la ecuación (25), que detalla el consumo agregado de los hogares, se modifica. El consumo agregado es siempre una función lineal de la riqueza total (ya que la función de utilidad es homogénea en c), pero la propensión a consumir esta riqueza (coeficiente de proporcionalidad) ya no es exógena. Esta propensión se define por una ecuación de comportamiento dinámico que depende de las variables p, σ, r y θ.

La curva ($C = 0$) del diagrama de fases depende entonces del valor de σ. Su asíntota no se modifica con σ. Específicamente, si la elasticidad de substitución disminuye (σ aumenta), la curva ($C = 0$) se desplaza hacia la izquierda, sin que la asíntota se mueva. El equilibrio estacionario de largo plazo corresponde entonces a un menor nivel de capital.

La explicación es similar a la que se dio en el caso de horizonte de vida finito. Para que exista una acumulación de capital positiva, los agentes deben ahorrar al comienzo de su vida para desahorrar luego. Mientras menor sea la elasticidad de substitución, mayor será la tasa de interés necesaria para llevar al mismo nivel de ahorro y, por ende, menor será la relación capital-trabajo.

Para todos los valores de σ, la relación capital-trabajo de equilibrio será inferior a la de la "regla de oro modificada" y, *a fortiori*, a la de "la regla de oro". Al igual que el carácter finito o infinito del horizonte de vida de los agentes, esta variante aleja el equilibrio de aquel de "la regla de oro", sin ser por ello fuente de ineficiencia.

3.5 Ingresos salariales de los individuos variables con la edad

En el modelo de Diamond, los agentes viven dos períodos, el segundo de los cuales corresponde a la jubilación, durante la cual no perciben ingresos salariales. Por esta razón, buscan suavizar su consumo, ahorrando durante su vida activa para desahorrar posteriormente. En general, se mantendrá este comportamiento siempre y cuando los ingresos salariales decrezcan a lo largo de la vida de los individuos. El razonamiento utilizado en la sección III.3 ya no se aplica: el nivel agregado de capital en la economía no será nulo, incluso si $r = \theta$. Las conclusiones pueden ser por tanto distintas. Se demuestra a continuación que más bien van en el sentido opuesto a las que se habían derivado anteriormente.

Considerando que los ingresos salariales (y paralelamente la productividad del trabajo) de los individuos nacidos en el período s decrecen a una tasa α a lo largo de su vida, su salario en el período t será igual a:

$$y(s,t) = a\ Y(t)\, e^{-\alpha(t-s)} \tag{33}$$

Para que $Y(t)$ represente efectivamente el ingreso salarial agregado, la constante a debe cumplir una condición que se obtiene al agregar estos ingresos para todos los agentes nacidos en fechas distintas, lo que debería conducir a $Y(t)$. Nótese que esta condición sólo puede darse si p es positivo, es decir si el horizonte de vida es finito (caso contrario, es imposible que el ingreso salarial decrezca a tasa constante durante un período infinito). Se estudia a continuación las consecuencias de un modelo en que la esperanza de vida es finita y en que los ingresos salariales decrecen con la edad. La función de utilidad de los agentes es logarítmica.

La solución del sistema es similar a la del modelo de base. Tan sólo el salario, tanto a nivel individual como agregado, tendrá una tasa de acumulación distinta. Las ecuaciones (25) y (27) permanecen idénticas, mientras que la relación (26) se reemplaza por:

$$\mathrm{H}(t) = (r + p + \alpha).H(t) - Y(t) \tag{34}$$

La tasa de actualización del salario es más importante que antes (por el parámetro α). Las ecuaciones que describen la dinámica del sistema son:

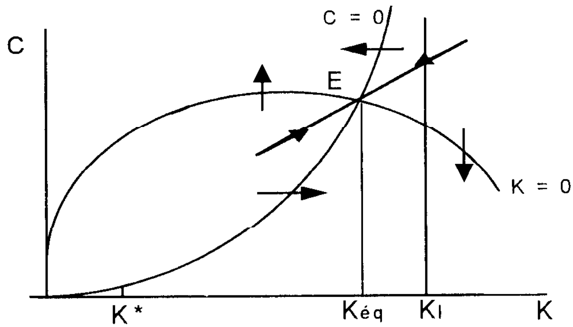
(35) $$C = \left[F''(K) + \alpha - \theta\right].C - \left(p + \alpha\right).\left(p + \theta\right).K$$

(36) $$K = F'(K) - C$$

El diagrama de fases se modifica consecuentemente:

Gráfico 4

Dinámica del sistema e ingresos salariales variables con la edad



El asíntota de la curva ($C = 0$) es ahora la recta ($K = Kl$), con $F'(Kl) = \theta - \alpha$, con una configuración de punto de silla. Al igual que antes, se puede demostrar que la tasa de interés se ubica entre dos valores extremos, de los cuales el uno ha sido modificado: $\theta - \alpha < r < \theta + p$. En función de los valores relativos de θ y de α, el límite inferior puede ser positivo o negativo. En el caso que se ha representado, es negativo.

Es entonces posible tener configuraciones en las que la tasa de interés de equilibrio es positiva y otras en las que es negativa. En el primer caso, la relación capital-trabajo es menor a la de "la regla de oro" y el equilibrio de mercado es eficiente. En el segundo caso, el equilibrio es ineficiente y hay sobreacumulación de capital.

Con respecto a "la regla de oro", el carácter finito del horizonte de vida tiende a aumentar la tasa de interés de equilibrio. En cambio, la reducción de los ingresos salariales a lo largo de la vida tiene consecuencias opuestas. El modelo incluye estos dos efectos contrapuestos. Se puede entonces entender porqué la ineficiencia de los equilibrios podía considerarse en el modelo de Diamond y las condiciones bajo las cuales aparece esta ineficiencia.

4. La importancia de la deuda pública

En esta parte se estudia el impacto de la deuda pública sobre la economía. En los modelos de generaciones traslapadas como los que se han presentado, los individuos tienen anticipaciones perfectas y arbitran intertemporalmente al inicio de su vida activa. Cuando hay un cambio imprevisto en el nivel de deuda pública y, paralelamente, de los impuestos que soportan los agentes, estos últimos modifican su comportamiento.

Considerando inicialmente las modificaciones del sendero de crecimiento de largo plazo, el modelo de Diamond es útil para observar como la relación capital-trabajo de equilibrio varía cuando la deuda pública se incrementa, distinguiendo en especial si el endeudamiento público es externo o interno. El modelo de Blanchard discute el carácter finito del horizonte de vida de los agentes.

Por otro lado, si el horizonte de vida es finito, las variaciones del endeudamiento público no afectan a todos los individuos en el mismo período de su vida, por lo que aparecen efectos redistributivos entre generaciones. Las simulaciones de Auerbach y Kotlikoff constituyen una evidencia empírica interesante y adaptada al estudio del problema y su relación con los efectos de largo plazo.

4.1 El endeudamiento público externo

En base al modelo de Diamond, se introduce la posibilidad de un endeudamiento externo público. Con una tasa de crecimiento poblacional constante, se considera una relación constante entre deuda externa y población (g_l). El Gobierno asume el pago de intereses de la deuda, suponiendo que la tasa de interés es uniforme para todos los agentes.

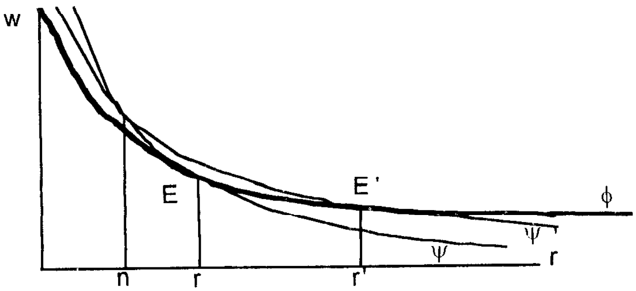
Como no es el caso de "la regla de oro", la tasa de interés (r) y la tasa de crecimiento poblacional (n) son distintas. Para mantener constante la relación g_1, en cada período es necesario financiar vía impuestos la proporción del servicio de la deuda que no se financia con endeudamiento adicional. En el caso (eficiente, desde un punto de vista dinámico) en que $r > n$, los impuestos que debe pagar cada individuo son iguales a $(r - n).g_1$. En el caso (ineficiente) en que $r < n$, el "impuesto" sería negativo.

La relación ϕ entre el salario (w_t) y la tasa de interés (r_t) de un mismo período t no se ha modificado, ya que se deduce de la optimización de las empresas. En cambio, la función ψ, que integra el comportamiento de ahorro de los hogares, se modifica. Efectivamente, los agentes tienen un ingreso salarial w_t del que hay que restar el monto de los impuestos. La ecuación (12) que define implícitamente a la función ψ se convierte en:

(37) $$r_{t+1} = f'\left(\frac{s\left(w_t - \left(r_t - n\right) g_1, r_{t+1}\right)}{1+n}\right)$$

A partir de esta expresión, es posible calcular, asumiendo w_t constante, el impacto sobre r_{t+1} de un incremento de g_1. Si se utiliza la condición de estabilidad, similar a la ecuación (14), se puede demostrar que, cuando g_1 crece, r_{t+1} aumenta si $r > n$, y disminuye en la situación inversa. Gráficamente, esto significa que la curva ψ se modifica y se observa una nueva curva ψ':

Gráfico 5
Ahorro de los hogares y deuda pública externa



El gráfico se ha representado en el caso en que el equilibrio inicial de largo plazo, E, es dinámicamente eficiente ($r > n$). La introducción de la deuda pública induce un nuevo equilibrio E', con una tasa de interés r'. Cuando $r < n$, se llega a la misma conclusión: la deuda externa pública implica un equilibrio de largo plazo más alejado del de la regla de oro.

4.2 El endeudamiento público interno

Al igual que para la deuda externa, la existencia de deuda interna, que se supone crece al mismo ritmo que la población, implica una tributación que permita financiar la proporción del servicio de la deuda que no está cubierta por nuevo endeudamiento en cada período. Al igual que en el caso anterior, si g_2 es la relación entre deuda interna y población, el impuesto que debe pagar cada individuo es $(r - n).g_2$, con un monto positivo cuando $r > n$.

El hecho que la deuda sea interna y, por ende, que esté en poder de agentes residentes, modifica el equilibrio ahorro-inversión. Si S_t es el ahorro de los hogares, K_t el monto de capital en la economía y G_{t+1} el nivel de deuda pública que ha sido emitido en el período t y debe ser pagado y financiado (vía nuevo endeudamiento e imposición) en el período $t+1$, la relación (11) que describe el equilibrio ahorro-inversión se convierte en:

(38) $$S_t = K_{t+1} + G_{t+1}$$

Es decir, dividiendo por la población en el período $t+1$ (L_{t+1}) :

(39) $$\frac{s_t}{1+n} = k_{t+1} + g_2$$

La relación ϕ entre el salario (w_t) y la tasa de interés (r_t) de un mismo período t permanece igual. En cuanto al comportamiento de ahorro de los hogares descrito por la función ψ, la deuda interna tiene las mismas consecuencias que la deuda externa sobre los ingresos de los agentes. Más aún, como lo muestra la relación (39), provoca un desplazamiento de ahorro privado (*crowding-out*), ya que los agentes deben tomar en cuenta las necesidades de financiamiento, g_2, del gobierno. La ecuación (12) que define implícitamente la función ψ se escribe ahora:

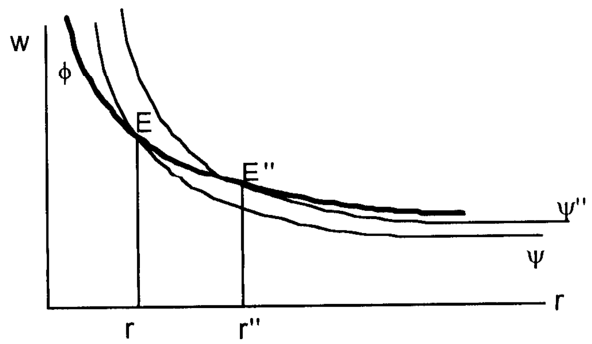
$$r_{t+1} = f'\left(\frac{s\left(w_t - (r_t - n).g_2, r_{t+1}\right)}{1+n} - g_2 \right) \tag{40}$$

Se pueden identificar dos canales de transmisión de la deuda pública sobre las tasas de interés: la variación del ingreso de los hogares, una vez deducidos los impuestos (si estos ingresos disminuyen, el ahorro se reduce) y la demanda de capitales en el mercado interno, ya que los agentes substituyen una parte de su inversión por compra de papeles públicos. Hay que comparar, entonces, el sentido y la magnitud de ambos impactos.

Así como en la sección precedente, se utiliza la condición de estabilidad del equilibrio, que es del mismo tipo que (14). Además, se debe utilizar una segunda hipótesis: que el consumo es un bien normal (es decir que $\delta s(w, r)/\delta w < 1$). Se puede entonces deducir que el impacto de g_2 sobre r_{t+1}, con w_t constante, es siempre positiva, por lo que hay un desplazamiento de la curva ψ hacia arriba, con una nueva curva ψ'':

Gráfico 6

Ahorro de los hogares y deuda pública interna



Cualquiera que sea la situación inicial de r con respecto a n, la introducción de la deuda interna implica un incremento de la tasa de interés de equilibrio.

Cuando $r > n$, el modelo se aleja de la situación de "la regla de oro". Los dos efectos (*crowding-out* y reducción del ingreso de los hogares) tienen impacto en la misma dirección sobre la tasa de interés. En cambio, cuando $r < n$, las conclusiones se acercan a las de "la regla de oro" y la tasa de interés podría ser eventualmente superior a la tasa de crecimiento poblacional. El efecto de desplazamiento de la inversión privada (*crowding-out*) es preponderante frente al incremento en los ingresos de los hogares (cuando $r < n$, el "impuesto" es negativo).

Para determinar el impacto de una reducción de la deuda externa, compensada por un incremento simultáneo de la deuda interna (es decir con un nivel de imposición constante), habría que tomar en cuenta el caso general en el que existen, en un momento dado, los dos tipos de endeudamiento con una relación total de deuda sobre población ($g_1 + g_2$). En base a procedimientos similares a los utilizados anteriormente, se puede demostrar que si la deuda externa se reemplaza por deuda interna, la tasa de interés de equilibrio se incrementa, sea cual sea el nivel relativo de r y de n. Esto se puede interpretar fácilmente, ya que el aumento de deuda interna provoca mayor demanda en el mercado interno de capitales, mientras que la tasa de interés internacional permanece constante, suponiendo que se trata de una economía pequeña. La restricción presupuestaria de los hogares no se ha modificado ya que los impuestos permanecen constantes, por lo que actúa un sólo canal de transmisión.

4.3 Los resultados de una simulación numérica

A continuación se presentan los resultados de largo plazo de una simulación numérica realizada en base al modelo de Auerbach y Kotlikoff (1987). Se trata de un modelo de equilibrio general calculable para la economía americana, con 55 generaciones de individuos que tienen un comportamiento intertemporal consistente con las premisas básicas de la hipótesis del ciclo de vida, con anticipaciones racionales. Los agentes realizan un arbitraje entre consumo (C_t) y ocio (l_t) en cada período en base a una función de (u_t) con elasticidad de substitución contante (CES), sin que exista edad de jubilación definida institucionalmente:

(41)
$$u_t = \left[C_t^{1-\frac{1}{\rho}} + \alpha\, l_t^{1-\frac{1}{\rho}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\rho}}}$$

Denominando ρ la elasticidad de substitución intertemporal entre consumo y ocio y α la intensidad de la preferencia de los agentes por el ocio con respecto al consumo, la función de utilidad total U toma en cuenta la preferencia por el presente θ y la elasticidad intertemporal de substitución g entre los consumos de distintos períodos:

(42)
$$U = \frac{1}{1 - 1/\gamma} \prod_{t=1}^{55} (1+\theta)^{-(t-1)}\, u_t^{1-1/\gamma}$$

Las empresas producen un único bien, con una función de producción Cobb-Douglas[9]. La tasa de interés y el salario se fijan al igualarse con las productividades marginales del capital y del trabajo. Los hogares y el Estado tienen restricciones presupuestarias intertemporales. La restricción presupuestaria de los hogares incluye el ingreso salarial a valor presente, en el que se considera una evolución de la productividad del trabajo a lo largo de la vida. Esta evolución se estableció en base a los resultados de distintos estudios sobre la economía norteamericana. En dicho trabajo se estudian distintas políticas fiscales (en función de la base imponible y de la progresividad de los impuestos) y de jubilación (de acuerdo al monto, a los beneficiarios y a la forma de financiamiento de la protección social).

En el modelo, la función de utilidad de los agentes es bastante precisa y el horizonte de vida es predefinido y cierto (55 períodos). La solución del sistema agregado es compleja y no puede ser realizada algebraicamente. Se utiliza una solución numérica que presupone la existencia de un

---

9 En realidad, es una función de tipo CES, pero con una elasticidad de substitución unitaria en el momento de la resolución del modelo.

equilibrio estable de largo plazo, que se obtiene por iteración (mediante un algoritmo de tipo Gauss-Seidel) en base a valores iniciales arbitrarios. Primero se determina el nuevo equilibrio de largo plazo frente a cambios imprevistos en la política fiscal. Luego, se calcula el sendero de transición, suponiendo una convergencia hacia el equilibrio final en máximo 150 períodos. El modelo se resuelve en base a un método iterativo de manera simultánea para cada uno de estos 150 períodos, los mismos que son interdependientes.

Una de las ventajas del modelo es que permite observar tanto los equilibrios estacionarios como la evolución entre dos estados. El equilibrio inicial corresponde a una situación en la cual la tasa de interés (endógena) es superior a la tasa de preferencia por el presente, con una tributación proporcional al ingreso a una tasa inicial de 15%. Se estudia una variante en la que los gastos gubernamentales, financiados por endeudamiento público adicional y sin variación de impuestos, se incrementan por un período de 5 o 10 años. Después de este período, los impuestos se vuelven endógenos, para mantener estable el déficit fiscal.

Cuadro 1

Capital, salarios e impuestos en función del nivel de deuda

	Stock de capital	Indice salarial	Nivel de imposición
Equilibrio estacionario inicial	95,1	1	15 %
Sin endeudamiento suplementario	87,7	0,977	20,2 %
Endeudamiento durante 5 años	80,7	0,959	22,1 %
Endeudamiento durante 10 años	71,1	0,931	24,9 %

Si no hay endeudamiento adicional, el incremento de los gastos públicos implica un desplazamiento de la inversión privada. El endeudamiento suplementario refuerza este efecto, de manera más pronunciada si se aplica a un período más largo. El *stock* de capital se reduce a largo plazo - al igual que el salario - y la tasa de interés aumenta (por rareza relativa de los factores de producción remunerados a su productividad marginal).El nivel impositivo debe ser incrementado para permitir mantener un sendero de equilibrio con mayor endeudamiento.

Los resultados concuerdan con las intuiciones que se derivan del modelo de base de Diamond, con dos puntos suplementarios: existen aquí efectos transitorios, que se estudia más adelante, y se puede observar la influencia de un incremento patrimonial de los hogares cuando la deuda pública crece. Este impacto se percibe de mejor manera en el modelo de Blanchard.

4.4 El horizonte finito de los agentes y el endeudamiento público

En el modelo de Blanchard, las conclusiones son similares en cuanto al impacto de la deuda pública sobre el *stock* de capital a largo plazo, pero el razonamiento correspondiente es ligeramente distinto. Los individuos tienen un comportamiento distinto al de los modelos de Diamond o de Auerbach y Kotlikoff: su consumo es proporcional al total de su ingreso y no únicamente a sus ingresos salariales. Cuando se incrementa la deuda pública, los individuos van a tomar en cuenta el incremento de los impuestos y la reducción concomitante de sus ingresos. Sin embargo, adicionalmente van a considerar el aumento de sus ingresos no salariales; a nivel agregado, estos incluyen la tenencia de deuda interna.

Introduciendo el endeudamiento público interno D, el nivel de gasto público G y los ingresos fiscales T, la dinámica de la deuda pública responde a una restricción intertemporal (hay que agregar además una condición de transversalidad):

(43) $$D = r\ D - T + G$$

En cuanto a la riqueza salarial de los agentes, esta es igual al valor presente de los ingresos salariales futuros (de manera similar a la ecuación (23)), pero se han restado en cada período los impuestos asociados a dichos ingresos. Se deduce, por agregación, la riqueza salarial H del conjunto de la economía. La riqueza no salarial agregada W se compone del *stock* de capital K, al que se suma la totalidad de la deuda pública D. Las ecuaciones (31) y (32) se convierten en las siguientes y resumen la dinámica del sistema:

(44) $$\dot{C} = (r - \theta)C - p(p - \theta)[K + D]$$

(45) $$\dot{K} = F(K) - C - G$$

La tasa de interés sigue siendo igual a la productividad marginal del capital ($r = F'(K)$). Se supone que la deuda pública interna se incrementa en un monto dD_O en el período t_0 y luego se mantiene indefinidamente en su nuevo nivel (como no hay crecimiento poblacional, el equilibrio estacionario es compatible con un nivel de deuda constante). Para ello, los impuestos se incrementan en un monto $dT_O = r\ (K_O).dD_O$, de manera que se realice el equilibrio (41), y el nivel impositivo aumenta luego para contrarrestar las variaciones endógenas de la tasa de interés, de manera que el nivel de endeudamiento global permanezca estable.

Si se modifica D, no se puede interpretar (44) como una relación de variación cercana al equilibrio, ya que también cambia T para alcanzar un nuevo equilibrio estacionario para el nuevo valor de D (no se obtiene, por tanto, el mismo equilibrio de largo plazo). En su lugar, hay que interpretar las relaciones que se derivan de (44) y (45) para todo equilibrio estacionario:

(46) $$[F'(K) - \theta].C = p\,(p + \theta)(K + D)$$

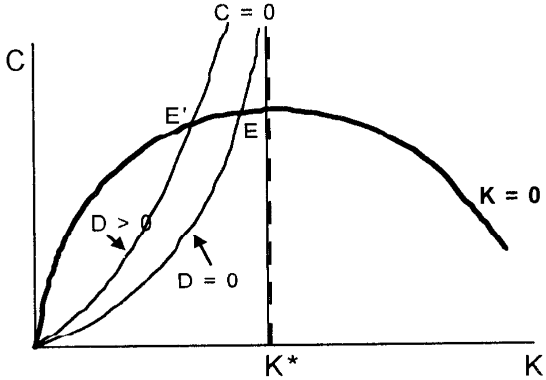
(47) $$F(K) = C - G$$

El consumo agregado C depende de la deuda pública y de los impuestos, por medio de su proporcionalidad a la riqueza total (ecuación (25)). Sin embargo, la riqueza no salarial se incrementa con el aumento de deuda pública y la riqueza salarial se reduce consecuentemente con el incremento impositivo. A nivel agregado, estas dos influencias se compensan exactamente. En tal caso, si $r > \theta$ (es decir, si $K < K^*$), un mayor endeudamiento sólo es compatible con un nuevo equilibrio estacionario si este último corresponde a un menor nivel de capital o a un mayor consumo. La ecuación (47) asegura que, de cambiarse de equilibrio con un nivel constante de gasto público, el consumo y el *stock* de capital deben variar en la misma dirección. La evolución del sistema permite comprender el resultado de estas dos evoluciones contradictorias.

La relación (43) se verifica automáticamente y se puede representar el diagrama de fases para la dinámica que resulta de las ecuaciones (44) y (45):

Gráfico 7

Horizonte finito de vida y deuda pública



La curva ($\dot{C} = 0$) ha sido trazada para la situación en que $D > 0$. Si el endeudamiento neto es negativo, la curva decrece inicialmente para niveles de capital reducidos. Si es fuertemente negativo (superior, en valor absoluto, al nivel de capital K^* de "la regla de oro modificada"), la curva decrece y se sitúa enteramente en la región en que $K > K^*$. La curva ($\dot{K} = 0$) se desplaza verticalmente cuando G varía y, en función del nivel de gasto público, pueden existir equilibrios múltiples, inestables o no existir equilibrio. Aquí, se considera el caso en que existe un único equilibrio estable, con una configuración de tipo punto de silla.

Una variación de D desplaza la curva ($\dot{C} = 0$). En el gráfico, se han representado dos casos, correspondientes a $D = 0$ y $D > 0$, que se comparan a continuación. Cuando D aumenta, el equilibrio de largo plazo se modifica, y se pasa de E a E', con menores niveles de capital y de consumo. La solución consiste en tener un nivel de capital suficientemente bajo para que la igualdad (44) se dé, mientras que el endeudamiento público es mayor y el consumo menor que al inicio.

Como interpretar este movimiento? La relación (25) sigue siendo válida, con un consumo proporcional a la riqueza total. Simplemente, la riqueza no salarial incluye la deuda pública en manos de residentes. El incremento de D en el período t_0 provoca un incremento del consumo. Como el ingreso total es constante (el aumento en el servicio de la deuda que reciben los hogares compensa el incremento tributario), se observa inicialmente una reducción del ahorro que conlleva menor nivel de capital. Puesto que la riqueza total disminuye, es posible observar de manera simultánea una reducción del ahorro y del consumo. Se llegará a un nuevo equilibrio estacionario, en el cual tanto K como C son menores.

La evolución observada se explica por el impacto de la deuda pública, por medio de la riqueza total, sobre el consumo de los hogares. Ahora, en un equilibrio de largo plazo, la relación entre D, K y C que se deriva de la ecuación (46) sólo es válida si $p > 0$. De hecho, si el horizonte de los agentes es infinito ($p = 0$), la dinámica de la función de consumo agregado se asemeja a la del consumo individual (ver la ecuación (39)). La curva ($C = 0$) es entonces una línea recta horizontal y la modificación que se acaba de analizar ya no tiene efecto en el largo plazo. Por lo tanto, el efecto analizado está relacionado con la incertidumbre existente en cuanto al horizonte de vida, que explica la diferencia entre las tasas de acumulación, a nivel agregado e individual, de los ingresos no salariales.

Si hubiera deuda externa, esta tendría un impacto sobre el consumo individual, a través de la reducción de los ingresos salariales. En cambio, como la deuda no forma parte de la riqueza no salarial de los residentes, no tendría impacto sobre el consumo agregado. Al igual que en el modelo de Diamond, uno de los canales de transmisión de la deuda interna desaparece, ya que la deuda externa no modifica el mercado interno de capitales.

4.5 Los efectos redistributivos del endeudamiento público y de los impuestos

Se ha observado la importancia que tiene el carácter finito del horizonte de vida de los agentes sobre el equilibrio de largo plazo. Esta característica tiene también impacto en el corto plazo. Cuando se da un incremento de la deuda pública no previsto por los agentes, las diferentes generaciones de individuos no se encuentran en el mismo período de su vida. Si modifican consecuentemente su comportamiento, los agentes lo harán en función de horizontes de vida más o menos importantes, lo que implica que el endeudamiento tendrá consecuencias redistributivas entre las distintas generaciones.

En el modelo de Auerbach y Kotlikoff, la productividad del trabajo y, por ende, los ingresos salariales varían con la edad. Basada en varios estudios empíricos, se asume que esta evolución salarial a lo largo de la carrera tiene un perfil ascendente al comienzo de la vida activa pero descendente al final de la misma. En cada período, los individuos arbitran entre consumo y ocio. Otorgarán un mayor peso relativo al trabajo en las épocas de mejores ingresos salariales, mientras que uno mayor al ocio al acercarse su muerte. Por lo demás, los agentes suavizan su consumo a lo largo de su vida frente a variaciones más volátiles de sus ingresos, por lo que *los* "viejos" tendrán una mayor propensión marginal a consumir que los "jóvenes"; y mayor aun en relación con la de los "jóvenes" que están en el nivel salarial más alto de su carrera. Esto corresponde al menor horizonte de vida de los "viejos". Como consecuencia, cualquier medida que conduzca a una redistribución intergeneracional tendrá un impacto en los niveles de consumo y de ahorro.

Se considera primero un incremento de los gastos públicos de consumo, que puede ser financiado vía impuestos o vía endeudamiento público. Con el fin de no tener un endeudamiento infinito, se asume la situación en que la deuda se incrementa durante 10 años consecutivos. Luego de este período, el déficit fiscal se estabilizará por medio de un incremento de impuestos.

El cuadro que se presenta a continuación resume las consecuencias de esta medida, hasta 90 años después de que se haya adoptado (es decir cuando ya se ha alcanzado prácticamente el equilibrio estacionario detallado en la sección IV.3, tanto para el nivel de capital K como para la tasa del impuesto a la renta t.

Cuadro 2

Incremento de los gastos públicos de consumo

	Sin mayor endeudamiento		Mayor endeudamiento por 10 años	
	K	*t*	*K*	*t*
Situación inicial	95,1	0,15	95,1	0,15
1 año	95,1	0,201	95,1	0,15
3 años	94,1	0,201	94,4	0,15
5 años	93,3	0,201	93,7	0,15
10 años	91,6	0,202	92,1	0,15
30 años	88,5	0,202	79,0	0,242
60 años	87,8	0,202	72,2	0,248
90 años	87,7	0,202	71,3	0,249

Como ya se mencionó, a largo plazo el endeudamiento público implica un desplazamiento de la inversión privada y una reducción del stock de capital (crowding-out). El impacto a corto plazo es bastante distinto: el stock de capital se incrementa ligeramente con mayor endeudamiento.

Cuáles son los mecanismos para los distintos plazos? La idea general es que los efectos de substitución se observan más rápidamente que los efectos de ingreso. A corto plazo, la mayoría de generaciones anticipan mayores pagos de impuestos a futuro, tomando en cuenta el mayor endeudamiento público. Realizarán por lo tanto un arbitraje más favorable por el trabajo en el corto plazo, con un nivel de consumo constante (no se considera por el momento los efectos de ingreso). Como consecuencia, ahorran más y se incrementa el *stock* de capital.

Sin embargo, los efectos de ingreso aparecen progresivamente. En el primer ejercicio, el conjunto de las generaciones en vida pagará el incremento de gasto público del período. En el segundo ejercicio, las generaciones futuras son las que pagan el mayor gasto, al menos parcialmente. El recurso a un mayor endeudamiento permite reducir el incremento de impuestos durante 10 años, incremento que será mayor en los años siguientes. Existe una redistribución (en términos de ingresos netos, es decir deducidos de impuestos) de las jóvenes generaciones y de las generaciones por nacer hacia las de mayor edad. Sobre estas últimas no recaerán los incrementos posteriores de impuestos, o recaerán en menor medida ya que trabajarán menos en el futuro.

Por lo tanto, aquellas generaciones que tienen una mayor propensión al consumo resultan favorecidas. A nivel agregado, habrá un incremento del consumo y una reducción del ahorro y del *stock* de capital. Lo que ocurre es que el impacto de este mecanismo demora, ya que bajo la hipótesis del ciclo de vida los agentes distribuyen a lo largo de varios períodos el incremento del consumo.

Los efectos de corto plazo pueden así esconder las consecuencias permanentes del endeudamiento sobre la economía. Basados en distintos ejercicios, Auerbach y Kotlikoff arriban a conclusiones similares (reducción de impuestos por tiempo limitado, cambio de esquema fiscal, por ejemplo).

Conclusiones

Esta visión rápida y somera de la literatura permite observar la manera a través de la cual ciertos fenómenos intervienen y familiarizarse con una literatura que, basada en fundamentos microeconómicos del comportamiento de los individuos, tiene por objetivo la descripción de los comportamientos agregados de distintas variables macroeconómicas.

El comportamiento de ciclo de vida puede tener un impacto en el funcionamiento de la economía a través de canales distintos. En cuanto a la acumulación de capital, la conclusión central es que el horizonte de vida, más o menos largo, de los agentes modifica el equilibrio de largo plazo, pero la reducción del ingreso salarial a lo largo de la vida activa (o en una parte de ésta) es la que explica la posibilidad de que existan equilibrios de mercado que no sean óptimos en el sentido de Pareto.

El impacto del endeudamiento público sobre el sendero de equilibrio de la economía tiene diversos canales de transmisión: la reducción de los ingresos salariales de los agentes asociada a un incremento de impuestos, el impacto de la deuda pública sobre la riqueza no salarial, las consecuencias del endeudamiento y del gasto público que conlleva sobre el equilibrio ahorro-inversión. Por último, la dinámica asociada al endeudamiento público demuestra que sus consecuencias de corto plazo pueden ser contradictorios con las consecuencias a más largo plazo.

Por último, algunos de los fenómenos que han sido resaltados habrían podido ser obtenidos en base a hipótesis distintas. Específicamente, si se consideran las restricciones de liquidez de los agentes económicos[10] se tendría, en cierta medida, una reducción de su horizonte de planeación, ya que podrían en algún momento en el futuro enfrentarse a dichas restricciones. Igualmente, fenómenos similares podrían observarse al estudiar ciertas imperfecciones de mercado, como una diferencia entre tasas de interés activas y pasivas[11]. Al contrario, la introducción de un comportamiento de "dinastía" de los agentes, que integrarían a sus descendientes en su función de utilidad, tendería a alejar el horizonte de planeación.

---

10 Ver Hubbard y Judd (1986) que muestran la importancia que las restricciones de liquidez pueden tener sobre el comportamiento de ciclo de vida.

11 Ver Charpin (1988).

Bibliografía

ANDO y Modigliani (1963), "The Life Cycle Hypothesis of Saving : Aggregate Implications and Test", *American Economic Review* 53, n°1, marzo.

AUERBACH y Kotlikoff (1987), *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press.

BLANCHARD (1985), "Debt, Deficits, and Finit Horizons", *Journal of Political Economy* 93, 2, abril.

BLANCHARD y Fischer (1989), *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press, Cambridge.

BRITTO (1973), "Some recent developments in the Theory of Economic Growth: An Interpretation", *Journal of Economic Literature*, diciembre.

CASS (1965), "Optimum growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies* 32, 3, julio.

CASS y Yaari (1967), "Individual Saving, Aggregate Capital Accumulation, and Efficient Growth", in Shell ed. (1967), *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth,* M.I.T. Press, Cambridge, Massachussets.

CHARPIN (1988), "Le modèle de cycle de vie : une approche numérique", *Revue de l'OFCE*, n° 25.

DIAMOND (1965), "National debt in a neo-classical growth model", *American Economic Review* 55, diciembre.

FRIEDMAN (1957), *A Theory of the Consumption Function*, Princeton, N.J., Princeton University Press.

HALL (1978), "Stochastic Implications of the Life Cycle Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence", *Journal of Political Economy* 86, 6.

HAYASHI (1982), " The Permanent Income Hypothesis: Estimation and Testing by Instrumental Variables", *Journal of Political Economy* 90, 5.

HUBBARD y Judd (1986), "Liquidity Constraints, Fiscal Policy and Consumption", *Brooking Papers on Economic Activity* 1.

KOTLIKOFF (1989), *What Determine Savings*, Cambridge MA, MIT Press.

KOTLIKOFF (1988), "Intergenerational Transfers and Savings", *Journal of Economic Perspectives* 2, primavera.

MODIGLIANI y Brumberg (1954), "Utility Analysis and the Consumption Function : An Interpretation of Cross-Section Data", in Kurihara ed., *Post Keynesian Economics*, Rutgers University Press.

MODIGLIANI (1986), "Life Cycle, Individual Thrift and the Wealth of Nations", *American Economic Review*, 76 nº 3, junio.

MODIGLIANI (1988), The Role of Intergenerational Transfers and Life Cycle Savings in the Accumulation of Wealth", *Journal of Economic Perspectives* 2, primavera.

PHELPS (1965), "Second Essay on the Golden Rule of Accumulation", *American economic Review* 55, 4, septiembre.

SAMUELSON (1958), "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy* 66, 6, diciembre.

SAMUELSON (1967), "A Turnpike Refutation of the Golden Rule in a Welfare-Maximizing Many-Year Plan", in Shell ed. (1967), *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth,* M.I.T. Press, Cambridge, Massachussets.

YAARI (1965), "Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer", *Review of Economic Studies* 32, abril.